Estudo dos autovalores do Problema Linear associado a uma Equação de Placas em $\mathbb{R}^n$

Study of the eigenvalues of the linear problem associates whit a plate equation in $\mathbb{R}^n$

Domingos Samanjata, MSc. **E-mail:** kasams2001@yahoo.com

Delphin Kabey Mwinken, MSc. **E-mail:** delphinsrc@gmail.com

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo do problema linear associado a uma equação de placas em $\mathbb{R}^n$ baseado-se no trabalho de Sugitani-Kawashima. O objectivo principal consiste em fazer um estudo dos autovalores do problema linear usando o espaço de Fourier na obtenção das soluções fundamentais.

PALAVRAS CHAVE: Espaço de Fourier; soluções fundamentais e autovalores

ABSTRACT

In this work we study the linear problem associated to an equation of plates in n-dimensional space and the method used was based on the work of Sugitani-Kawashima. The main objective of this work is studying the eigenvalues using the space for Fourier to obtain the fundamental soutions.

KEY WORDS: *Space of Fourier; fundamental solutions and eigenvalues.*

Introdução

Uma transformação matemática é utilizada para simplificar a solução de um problema. A importancia de usar uma transformação é criar um novo domínio na qual seja mais fácil manipular o problema a ser investigado. Uma vez obtidos os resultados no novo domínio, podem ser transformados inversamente. A transformada de Fourier é um espaço utilizado na resolução de vários problemas de Física - Matemática e, em particular, de problema de Cauchy. Neste trabalho utilizamos o espaço de Fourier para resolver o seguinte problema linear, a saber:

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u_{tt}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) + u_t(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

onde os dados iniciais satisfazem

$$u_0 \in H^3(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

Na equação (1) , $u = u_t$ representa o deslocamento da placa no ponto x e no instante de tempo t. O termo u_t representa uma dissipação friccional no sistema e $-\Delta u_{tt}$ é o termo de inércia rotacional.

O objectivo principal consiste em fazer um estudo dos autovalores do problema linear usando o espaço de Fourier na obtenção das soluções fundamentais, baseado-se no trabalho de Sugitani-Kawashima.

1 Resultados Básicos

Neste Secção apresentamos as principais definições e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. As demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados conhecidos, mas citamos referências onde tais resultados, junto com suas demonstrações, podem ser encontrados.

Em todo este trabalho, o símbolo Ω representará um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^n$, que eventualmente poderá ser todo $\mathbb{R}^n$.

Notações e Primeiros Conceitos:

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
2. $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ ponto no espaço $\mathbb{R}^n$;

3.$|\cdot|$ norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$;

4. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}$;

5. $L^2(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mensuráveis tais que $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \, dx < +\infty$; Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\| u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$;

Transformada de Fourier

Os conceitos e resultados de Transformada de Fourier usando neste trabalho podem ser encontrados em Adams [1], Dautray-Lions [6] e Evans [7].

1.1 Desigualdades Importantes

Desigualdade de Young

Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Desigualdade de Hausdorff-Young

Sejam $f \in L^p$, $1 \leq p < 2$. Então $\hat{f} \in L^{\frac{p}{p-1}}$ e $\| \hat{f} \|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \leq \| f \|_{L^p}$.

Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ou $q = 1$ e $p = \infty$ ou $q = \infty$ e $p = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e $\int_\Omega |f(x)g(x)| dx \leqslant \| f \|_{L^p(\Omega)} \| g \|_{L^q(\Omega)}$.

1.2 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Brezis [2] e Kesavan [8] .

2.0 Soluções Fundamentais do Problema linear

Neste Secção, encontraremos a solução do problema linear dado por

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u_{tt}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) + u_t(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \tag{3}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

onde os dados iniciais satisfazem

$$u_0 \in H^3(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

Vamos obter uma expressão para a solução do problema (3) a partir da transformada de Fourier. No espaçõ de Fourier em $\mathbb{R}^n$, o problema (3) é escrito da forma:

$$(1 + |\xi|^2)\hat{u}_{tt}(t,\xi) + |\xi|^4 \hat{u}(t,\xi) + \hat{u}_t(t,\xi) = 0, \quad (t,\xi) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \tag{5}$$

$$\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \quad \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

A equação característica de (5) é dado por

$$(1 + |\xi|^2)\lambda^2 + \lambda + |\xi|^4 = 0. \tag{7}$$

Resolvendo a equação (7) usando a fórmula resolvente obtemos as raízes da equação característica

$$\lambda_\pm(\xi) = \frac{1}{2(1+|\xi|^2)}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4(1 + |\xi|^2)|\xi|^4}\,\right], \tag{8}$$

em que $\lambda_\pm(\xi)$ são os autovalores associado a equação (5).

Sendo raizes distinctas, a solução geral do problema linear (5) é

$$\hat{u}(t,\xi) = C_1(\xi)e^{\lambda_+(\xi)t} + C_2(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t}, \tag{9}$$

com $C_1(\xi)$ e $C_2(\xi)$ dependendo dos dados iniciais. Usando (6), determinar os valores de $C_1(\xi)$ e $C_2(\xi)$ temos $\hat{u}(0,\xi) = C_1(\xi)e^{\lambda_+(\xi).0} + C_2(\xi)e^{\lambda_-(\xi).0} = \hat{u}_0(\xi)$,

ou seja, $C_1(\xi) = \hat{u}_0(\xi) - C_2(\xi)$. (10)

Derivando (9) temos

$$\hat{u}_t(t,\xi) = \lambda_+(\xi)C_1(\xi)e^{\lambda_+(\xi)t} + \lambda_-(\xi)C_2(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t},$$

e usando (6) obtemos

$$\hat{u}_t(0,\xi) = \lambda_+(\xi)C_1(\xi)e^{\lambda_+(\xi).0} + \lambda_-(\xi)C_2(\xi)e^{\lambda_-(\xi).0} = \hat{u}_1(\xi),$$

logo,

$$\lambda_+(\xi)C_1(\xi) + \lambda_-(\xi)C_2(\xi) = \hat{u}_1(\xi). \tag{11}$$

Resolvendo (10) e (11) simultaneamente, temos

$$\lambda_+(\xi)\{\hat{u}_0(\xi) - C_2(\xi)\} + \lambda_-(\xi)C_2(\xi) = \hat{u}_1(\xi),$$

$$\Rightarrow C_2(\xi)\{\lambda_-(\xi) - \lambda_+(\xi)\} = \hat{u}_1(\xi) - \lambda_+(\xi)\,\hat{u}_0(\xi),$$

assim,

$$C_2(\xi) = \frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\{\lambda_+(\xi)\,\hat{u}_0(\xi) - \hat{u}_1(\xi)\},$$ e de (10) temos

$$C_1(\xi) = \hat{u}_0(\xi) - \frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\{\lambda_+(\xi)\,\hat{u}_0(\xi) - \hat{u}_1(\xi)\},$$ ou seja

$$C_1(\xi) = \frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\{\hat{u}_1(\xi) - \lambda_-(\xi)\hat{u}_0(\xi)\}.$$

Portanto, a solução do problema linear (5)-(6) é da forma

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{G}(t,\xi)\{\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi)\} + \hat{H}(t,\xi)\hat{u}_0(\xi) \tag{12}$$

onde $\hat{G}(t,\xi)$ e $\hat{H}(t,\xi)$ são dadas explicitamente em termos das raízes características

$$\hat{G}(t,\xi) = \frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\left[e^{\lambda_+(\xi)t} - e^{\lambda_-(\xi)t}\right], \tag{13}$$

$$\widehat{H}(t,\xi) = \frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\left[(1+\lambda_+(\xi))e^{\lambda_-(\xi)t} - (1+\lambda_-(\xi))e^{\lambda_+(\xi)t}\right]. \qquad (14)$$

Definimos $G(t,x)$ e $H(t,x)$ por $G(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[\widehat{G}(t,\xi)](x)$ e

$H(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[\widehat{H}(t,\xi)](x)$, onde $\mathcal{F}^{-1}$ denota a transformada inversa de Fourier. Aplicando $\mathcal{F}^{-1}$ na equação (12) obtemos

$$u(t) = G(t) * \{u_0 + u_1\} + H(t) * u_0, \qquad (15)$$

onde $*$ denota a convolução em termos de x em $\mathbb{R}^n$. Portanto, (15) é a solução do problema (3)-(4) e $G(t,x)$ e $H(t,x)$ são as soluções fundamentais de (3).

3.0 Estudo dos autovalores do Problema linear

A seguir, vamos obter estimativas envolvendo os autovalores $\lambda_\pm(\xi)$ (definidos em (8)). Esses estimativas são usando no trabalho de Sugitani-Kawashima [11].

Lema 0.1

Considere $\lambda_\pm(\xi)$ dado em (8) e seja $|\xi| \leq r_0$. Então os seguintes resultados são verdadeiros:

[i] $-2|\xi|^4 \leq \lambda_+(\xi) \leq -|\xi|^4$;

[ii] $-1 \leq \lambda_-(\xi) \leq -\frac{1}{4}$;

[iii] $\frac{1}{4} \leq \lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi) \leq 1$;

[iv] $1 + \lambda_-(\xi) \leq 2|\xi|^4$;

[v] $\lambda_+(\xi) + |\xi|^4 \geq -2|\xi|^6$;

[vi] $\left(\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} - 1\right) \leq 8|\xi|^2$;

[vii] $\left(1 - e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t}\right)e^{-|\xi|^4 t} \leq 16|\xi|^2 e^{-\frac{1}{2}|\xi|^4 t}$;

para todo $t \geq 0$, onde r_0 é um número positivo fixo.

Demonstração:

i) Observe que,

$$1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq 1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 + 4(1+|\xi|^2)^2|\xi|^8.$$

Logo,

$$1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq (1 - 2(1+|\xi|^2)|\xi|^4)^2.$$

Para r_0 suficientemente pequeno temos que

$$1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 0,$$

e assim, segue que,

$$\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq 1-2(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \Leftrightarrow \; -1+\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq -2(1+|\xi|^2)|\xi|^4$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{-1+\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)} \leq -|\xi|^4 \Leftrightarrow \; \lambda_+(\xi) \leq -|\xi|^4.$$

Por outro lado, observe que,

$$1 \geq 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4.$$

Logo,

$$1+1 \geq 1+4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \Leftrightarrow \; 8 \geq 4+16(1+|\xi|^2)|\xi|^4$$

$$\Leftrightarrow \; -4 \geq -8+16(1+|\xi|^2)|\xi|^4$$

$$\Leftrightarrow \; -4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq -8(1+|\xi|^2)|\xi|^4+16(1+|\xi|^2)|\xi|^4(1+|\xi|^2)|\xi|^4$$

$$\Leftrightarrow \; 1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq 1-8(1+|\xi|^2)|\xi|^4+16(1+|\xi|^2)^2|\xi|^8$$

$$\Leftrightarrow \; 1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq (1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4)^2.$$

Para r_0 suficientemente pequeno temos que

$$\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq 1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)} \geq -2|\xi|^4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_+(\xi) \geq -2|\xi|^4.$$

Portanto,

$$-2|\xi|^4 \leq \lambda_+(\xi) \leq -|\xi|^4. \tag{16}$$

ii) Para provar ii) observe que,

$$1+4(1+|\xi|^2) \leq 1+4(1+|\xi|^2)^2+4(1+|\xi|^2)|\xi|^4,$$

ou seja

$$1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq 1-4(1+|\xi|^2)+4(1+|\xi|^2)^2.$$

Assim,

$$1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq (2(1+|\xi|^2)-1)^2.$$

Para r_0 suficientemente pequeno temos que

$$1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \; > 0\,,$$

e assim, segue que,

$$\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq 2(1+|\xi|^2)-1 \Leftrightarrow \ -\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq 1-2(1+|\xi|^2)$$

$$\Leftrightarrow \ -1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq -2(1+|\xi|^2) \Leftrightarrow \ \frac{-1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)} \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \ \lambda_-(\xi) \geq -1.$$

Por outro lado,

$$\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq 0 \geq \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)-1 \quad \Leftrightarrow -\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq 1-\frac{1}{2}(1+|\xi|^2)$$

$$\Leftrightarrow \ -1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq -\frac{1}{2}(1+|\xi|^2) \quad \Leftrightarrow \ \frac{-1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)} \leq -\frac{1}{4}$$

Port

$$\Leftrightarrow \ \lambda_-(\xi) \leq -\frac{1}{4}.$$

anto,

$$-1 \leq \lambda_-(\xi) \leq -\frac{1}{4}. \qquad (17)$$

iii) Vamos provar que $\frac{1}{4} \leq \lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi) \leq 1.$

Observe que,

$$1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq (1+|\xi|^2)^2.$$

Logo,

$$\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq 1+|\xi|^2 \Leftrightarrow \ \frac{\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{(1+|\xi|^2)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \ \lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi) \leq 1.$$

Por outro lado, observe que para r_0 suficientemente pequeno, temos que

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\left|\xi\right|^2 + \frac{1}{16}\left|\xi\right|^4.$$

Logo, $1 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{16}(1+2|\xi|^2+|\xi|^4).$

Além disso, existe r_0 tal que $4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq \frac{1}{2}.$

Assim temos que $1 \geq 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 + \frac{1}{16}(1+2|\xi|^2+|\xi|^4)$, e sendo assim, segue que

$$\lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi) \geq \frac{1}{4}.$$

Portanto $\frac{1}{4} \leq \lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi) \leq 1.$ (18)

iv) Na sequencia vamos provar que

$$1+\lambda_{-}(\xi) \leq 2|\xi|^{4}.$$

Observeque, para r_0 suficientemente pequeno, temos

$$1 \geq 1+4|\xi|^{2}-20|\xi|^{6}+32|\xi|^{10}+16|\xi|^{12}.$$

Assim,

$$1 \geq 1+4|\xi|^{2}+4|\xi|^{4}-4|\xi|^{4}-24|\xi|^{6}+4|\xi|^{6}+32|\xi|^{10}+16|\xi|^{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-4(1+|\xi|^{2})|\xi|^{4} \geq 1+4|\xi|^{2}-4|\xi|^{4}-24|\xi|^{6}+32|\xi|^{10}+16|\xi|^{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-4(1+|\xi|^{2})|\xi|^{4} \geq (1+2|\xi|^{2}-4|\xi|^{4}-4|\xi|^{6})^{2}.$$

Para r_0 suficientemente pequeno segue que

$$\sqrt{1-4(1+|\xi|^{2})|\xi|^{4}} \geq 1+2|\xi|^{2}-4|\xi|^{4}-4|\xi|^{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{1-4(1+|\xi|^{2})|\xi|^{4}} \leq -1-2|\xi|^{2}+4|\xi|^{4}+4|\xi|^{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+2|\xi|^{2}-\sqrt{1-4(1+|\xi|^{2})|\xi|^{4}} \leq 4|\xi|^{4}+4|\xi|^{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2+2|\xi|^{2}-1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^{2})|\xi|^{4}} \leq 2|\xi|^{4}(2+2|\xi|^{2})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2+2|\xi^{2}|-1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^{2})|\xi|^{4}}}{2(1+|\xi|^{2})} \leq 2|\xi|^{4}.$$

Portanto,

$$1+\lambda_{-}(\xi) \leq 2|\xi|^{4}. \tag{19}$$

v) Nesse item vamos provar que

$$\lambda_{+}(\xi)+|\xi|^{4} \geq -2|\xi|^{6}.$$

Observe que, para r_0 suficientemente pequeno, temos que

$$1 \geq 1-8|\xi|^{6}-4|\xi|^{8}+24|\xi|^{10}+52|\xi|^{12}+48|\xi|^{14}+16|\xi|^{16}.$$

Assim,

$$1 \geq 1-4|\xi|^{4}+4|\xi|^{4}-12|\xi|^{6}+4|\xi|^{6}-4|\xi|^{8}+24|\xi|^{10}$$
$$+52|\xi|^{12}+48|\xi|^{14}+16|\xi|^{16}$$
$$\Leftrightarrow 1-4(1+|\xi|^{2})|\xi|^{4} \geq 1-4|\xi|^{4}-12|\xi|^{6}-4|\xi|^{8}+24|\xi|^{10}$$
$$+52|\xi|^{12}+48|\xi|^{14}+16|\xi|^{16}$$
$$\Leftrightarrow 1-4(1+|\xi|^{2})|\xi|^{4} \geq (1-2|\xi|^{4}-6|\xi|^{6}-4|\xi|^{8})^{2}.$$

Para r_0 suficientemente pequeno, segue que,

$$\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq 1-2|\xi|^4-6|\xi|^6-4|\xi|^8$$

$$\Leftrightarrow \quad -1+\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq -2|\xi|^4-6|\xi|^6-4|\xi|^8$$

$$\Leftrightarrow \quad -1+\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq 2(1+|\xi|^2)(-|\xi|^4-2|\xi|^6)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1+\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)} \geq -|\xi|^4-2|\xi|^6.$$

Portanto,

$$\lambda_+(\xi)+|\xi|^4 \geq -2|\xi|^6. \tag{20}$$

vi) Na sequencia vamos provar que

$$\left(\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}-1\right) \leq 8|\xi|^2.$$

Observeque, para r_0 suficientemente pequeno, temos que

$$1 \leq 1+14|\xi|^2+59|\xi|^4-68|\xi|^6-320|\xi|^8-256|\xi|^{10}.$$

Assim,

$$1 \leq 1+16|\xi|^2-2|\xi|^2+60|\xi|^4-|\xi|^4-68|\xi|^6-320|\xi|^8-256|\xi|^{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+2|\xi|^2+|\xi|^4 \leq 1+16|\xi|^2+60|\xi|^4-68|\xi|^6-320|\xi|^8-256|\xi|^{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+|\xi|^2)^2 \leq (1+8|\xi|^2)^2(1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4).$$

Logo,

$$\Leftrightarrow \quad 1+|\xi|^2 \leq (1+8|\xi|^2)\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+|\xi|^2}{\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}} \leq 1+8|\xi|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+|\xi|^2}{\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}-1 \leq 8|\xi|^2.$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}-1\right) \leq 8|\xi|^2. \tag{21}$$

vii) Porfim, provaremos que

$$\left(1-e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t}\right)e^{-|\xi|^4t}\leq 16|\xi|^2e^{-\frac{1}{2}|\xi|^4t}.$$

Note que de (20) temos que

$$\lambda_+(\xi)+|\xi|^4\geq -2|\xi|^6.$$

Logo,

$$\left(1-e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t}\right)e^{-|\xi|^4t}\leq\left(1-e^{-2|\xi|^6t}\right)e^{-|\xi|^4t}.$$

Dessa forma, é suficiente provar que

$$\left(1-e^{-2|\xi|^6t}\right)e^{-|\xi|^4t}\leq 16|\xi|^2e^{-\frac{1}{2}|\xi|^4t},$$

ou seja

$$1-e^{-2|\xi|^6t}\leq 16|\xi|^2e^{\frac{1}{2}|\xi|^4t}.$$

Definimos para todo $t\geq 0$:

$$f(t):=16|\xi|^2e^{\frac{1}{2}|\xi|^4t}+e^{-2|\xi|^6t}-1,$$

onde$|\xi|$esta fixo com$|\xi|\leq r_0$. Mostraremos que $f(t)$ é positivo para todo $t\geq 0$. Observe que

$$f(0)=16|\xi|^2+1-1=16|\xi|^2\geq 0.$$

Alem disso, note que

$$\begin{aligned}f'(t)&=8|\xi|^6e^{\frac{1}{2}|\xi|^4t}-2|\xi|^6e^{-2|\xi|^6t}\\&=\left(8-2e^{(-2|\xi|^6-\frac{1}{2}|\xi|^4)t}\right)|\xi|^6e^{\frac{1}{2}|\xi|^4t}.\end{aligned}\tag{22}$$

Logo, $f'(t)\geq 0$ para todo $t\geq 0$, pois

$$8>2e^{(-2|\xi|^6-\frac{1}{2}|\xi|^4)t}\quad\text{e}\quad|\xi|^6e^{\frac{1}{2}|\xi|^4t}\geq 0.$$

Portanto, $f(t)$ é positivo para todo $t\geq 0$ mostrando que

$$1-e^{-2|\xi|^6t}\leq 16|\xi|^2e^{\frac{1}{2}|\xi|^4t},$$

ou seja

$$\left(1-e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t}\right)e^{-|\xi|^4t}\leq 16|\xi|^2e^{-\frac{1}{2}|\xi|^4t}.\tag{23}$$

Portanto a prova esta completa por (16), (17), (18), (19), (20), (21) e (23).

4.0 Conclusão

Neste trabalho foi possível representar as soluções fundamentais do problema linear usando a transformada de Fourier e os conceitos básicos de Matemática. Foram apresentado uma séries de propriedades e teoremas de resoluções de problemas de matemática .

Por ultimo, foram usando técnicas de matemática para fazer o estudo dos autovalores usado no trabalho de Sugitani-Kawashima.

5.0 References

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York,1975.

[2] H. Brezis, *Análisis funcional Teoria y aplicaciones*. Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[3] R.C. Charão, C.R. da Luz, R. Ikehata, *New decay rates for a problem of plate dynamics with fractional damping*.J.Hyperbolic Differ.Equ. **10** (2013),no.3,563–575.

[4] R. Coimbra Charão, C.R.da Luz, R. Ikehata, *Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space*.J.Math.Anal.Appl. **408**(2013),no.1,247–255.

[5] M. D'Abbicco, R. Coimbra Charão, C.R.da Luz, *Sharp time decay rates on a hyperbolic plate model under effects of an intermediate damping with a time-dependent coefficient*. Discrete Contin.Dyn.Syst.Ser. A **36** (2016), 2419–2447.

[6] R. Dautray, J.L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*.Volume 2: Functional and Variational Methods, Springer, Berlin Heidelberg, 1988.

[7] L.C.Evans, *Partial Differential Equations*.American Mathematical Society,2002.

[8] S.Kesavan,*Topics in functional analysis and applications*.Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[9] Y. Liu, *Decay of solutions to an inertial model for a semilinear plate equation with memory*.J.Math.Anal.Appl. **394** (2012), 616-632.

[10] Y.Liu, S.Kawashima, *Decay property for a plate equation with memory-type dissipation*.Kinet.Relat.Models **4**(2011), 531-547.

[11] Y.Sugitani, S.Kawashima, *Decay estimates of solutions to a semi-linear dissipative plate equation*. J. Hyperbolic Diff.Eqns. **7**(2010),471-501.

[12] K.Yagdjian, *The Cauchy Problem for Hyperbolic Operators. Multiple Characteristics. Micro-Local Approach*. Mathematical Topics, 12, Akademi e Verlag, Berlin, 1997.

Síntese Curricular dos Autores:

MSc. Domingos Samanjata. Mestre em Matemática Pura e Aplicada, Licenciado em Matemática de Educação, docente do Instituto Superior Politécnico do Huambo da Universidade José Eduardo dos Santos e leccionando as cardeiras de Análise Complexa, Análise Matemática III, Análise Matemática

IV, Equações Diferenciais Ordinárias e Probabilidade e Estatística nos cursos de Engenharia na Instituição acima referenciado.

MSc. Delphin Kabey Mwinken. Mestre em Engenharia Civil, Licenciado em Ciências Exactas, docente do Instituto Superior Politécnico do Huambo da Universidade José Eduardo dos Santos e leccionando as cardeiras de Álgebra e Geometria Analítica, Electrónica Teórica e Análise Matemática I, II, III, IV e V nos cursos de Engenharia na Instituição acima referenciado.