O ESPAÇO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS NUM ESPAÇO DE ALEXANDROFF

Autor: Eustache Makambo

E-mail: makambostch87@gmail.com

RESUMO Data de recepção: 15/09/2019 Data de aceitação: 20/10/2019

Este artigo tem como ponto focal o estudo da álgebra de funções contínuas reais definidas num espaço de Alexandroff completamente regular. Mostramos que o espaço C(X) das funções reais contínuas, definidas num espaço de Alexandroff completamente regular X, é uma álgebra. Denotando $\mathbb{R}^X$ a álgebra das funções reais definidas no espaço de Alexandroff X, a sua sub-álgebra C(X) é calculada como se segue: $C(X)=\{ f: X \to \mathbb{R} / f$ *é* continua em $X\} = \{ f \in \mathbb{R}^X : f(B_p) = \{f(p)\}, \forall p \in X\}$. Tal continuidade em X assenta-se na relação $f(B_p) \subset B_{f(p)}$, $\forall p \in X$ p, onde B_p é o menor aberto de X contendo p. Com a regularidade completa de X, introduzimos uma nova topologia funcional em C(X) chamada a "*topologia da base irredutível*" e denotada por $C_i(X)$ e cujo elemento genérico pode ser definido por $[B_p,V] = \{f \in C(X): f(B_p) \subset V\}$, onde $p \in X$.

Palavras chaves: Espaço de Alexandroff de tipo finito, base irredutível, co-topologia, homeomorfismo, imersão, avaliação (pontual).

THE CONTINUOUS FUNCTIONS SPACE IN AN ALEXANDROFF SPACE

ABSTRACT

The focus of this paper is the study of the Algebra of Real Continuous Functions defined in Complete Regular Alexandroff space. We show that C(X) space of real continuous functions defined in a complete regular Alexandroff space X is an Algebra. We denote such algebra by $\mathbb{R}^X$. The sub-algebra C(X) can be calculated like this: $C(X)=\{ f: X \to \mathbb{R} / f$ *is continuous on* $X\} = \{ f \in \mathbb{R}^X : f(B_p) = \{f(p)\}, \forall p \in X\}$. In this way, continuity on X stands on the relation $f(B_p) \subset B_{f(p)}$, $\forall p \in X$ p, where B_p is the smallest open of X that contains p. With the complete regularity of X, we introduce a new functional topology in C (X) named "*topology of irreducible base*" e denoted by $C_i(X)$ which generical element can be defined by $[B_p,V] = \{f \in C(X): f(B_p) \subset V\}$, onde $p \in X$.

Keywords: Finite Alexandroff spaces, Irreducible base, topology, Homeomorphism, Immersion, Punctual Evaluation.

Introdução

No presente artigo, consideramos as funções reais contínuas definidas num espaço de Alexandroff completamente regular. Para melhor ilustrar a ideia, seja X um espaço de Alexandroff completamente regular e U um aberto não vazio de X. Então, como o afirma (NTANTU, 2010), a função característica de U é sempre contínua em X. Assim, se $p \in U$, podemos construir uma função $f: X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(p) = 1$ e $f(X \setminus U) = 0$. Logo, a álgebra C(X) das funções contínuas de X para $\mathbb{R}$ torna-se uma álgebra interessante para a investigação científica. Além disso, se f é um elemento de C(X) e se X é um espaço de Alexandroff, mostramos que $f(Bp) = f(p)$, onde B_P é o menor aberto X contendo o ponto p.

Em consequência, agora trata-se de impor a "topologia da base irredutível" em C(X). Mostramos que C(X) munido dessa topologia, e denotado $C_i(X)$, é uma álgebra topológica possuindo propriedades interessantes. Começamos por estudar o comportamento dessa álgebra funcional em relação aos operadores tais como a avaliação pontual e a avaliação geral, os homomorfismos de álgebras e o dual de uma função contínua entre dois espaços de Alexandroff (EUSTACHE, 2013). Um dos problemas majores que investigamos também é o de impor em $C_i(X)$ uma propriedade algébrico-topológica e encontrar o seu equivalente no espaço de Alexandroff X.

Desenvolvimento

Continuidade nos espaços de Alexandroff

Definição

Sejam (X,τ_1) e (Y,τ_2) dois espaços topológicos. Uma função $f: X \to Y$ é contínua se e somente se para cada aberta S de Y, $f^{-1}(S)$ é um aberto de X (CASTRO, 2010); (GRAWERT, 1998).

A Continuidade das funções, definidas entre espaços de Alexandroff, expressa-se em termos de conjuntos B_p como mostrado no seguinte teorema (SHIRAZI e GOLESTANI, 2011); (EUSTACHE, 2013).

Teorema 1.

Sejam X e Y dois espaços de Alexandroff e $f: X \to Y$ uma função. Então f é contínua em X se e somente se $f(B_p) \subset B_{f(p)}$, $\forall p \in X$.

Prova

Suponhamos que f seja contínua e $p\in X$. Como $f(p)\in B_{f(p)}$ e $B_{f(p)}$ é vizinhança de f(p) em Y, pela continuidade de f no ponto p, existe V aberto de X tal que $p\in V$ e $f(V)\subset B_{f(p)}$. Então $B_p \subset V$ e $f(B_p) \subset f(V) \subset B_{f(p)}$ levam à inclusão $f(B_p) \subset B_{f(p)}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\forall p\in X$, $f(B_p) \subset B_{f(p)}$. Fixamos $p\in X$ e mostrar que f é contínua em p. Seja W uma vizinhança aberta de f(p) em Y. Claramente, $B_{f(p)} \subset W$ e, por hipótese $f(B_p) \subset B_{f(p)}$. Logo, $f(B_p) \subset B_{f(p)} \subset W$. Daí, B_p é uma vizinhança de p em X tal que $f(B_p)$ está contido em W, conclui-se que f é contínua em p ■.

Teorema 2

Sejam X e Y dois espaços de Alexandroff e f: $X\to Y$ uma bijeção. Então, f é um homeomorfismo se e somente se $f(B_p) = B_{f(p)}$ para todo $p\in X$, isto é, $B_p = f^{-1}(B_{f(p)})$, $\forall p\in X$.

Em (EUSTACHE, 2013): (NTANTU, 2010) e (MPAKASA, 2011), encontra-se uma demonsatração mais detalhada.

Se X é um conjunto não-vazio e $\mathbb{R}$ a recta real, denota-se por $\mathbb{R}^X$ o conjunto de todas as aplicações de X em $\mathbb{R}$.

Teorema 3

Seja X um espaço de Alexandroff e $\mathbb{R}$ a recta real munida da sua topologia euclidiana. Se C(X) = $\{f\colon \mathbb{R} \to X \,/\, f$ é contínua em $X\}$, então $C(X) = \{f\in \mathbb{R}^X\colon f(B_p) = f(p),\ \forall p\in X\}$.

Prova

Assumimos que $A = \{f\in\mathbb{R}^X : f(B_p)=\{f(p)\}, \forall\, p\in X\}$. Mostramos que C(X) = A. Seja $f\in C(X)$. Então $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua e, para $p\in X$, seja c = f(p) em $\mathbb{R}$. Consideramos $f^{-1}(c) = \{x\in X\colon f(x) = c\} = \{x\in X\colon (f-c_X)(x) = 0\}$. Onde c_X é a função constante de X para $\mathbb{R}$ que envia cada elemento de X para o real c. Agora, $f^{-1}(c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x\in X : \left|(f-c_X)(x)\right| \angle \frac{1}{n}\right\}$ é um conjunto G_δ no espaço de Alexandroff X. Logo $f^{-1}(c)$ é aberto em X. Como $p\in f^{-1}(c)$, então $B_p \subset f^{-1}(c)$; o que mostra que $f(B_p) = \{c\} = \{f(p)\}$. Portanto $f\in A$.

Para a inclusão inversa, seja $f \in A$. Mostramos que $f \in C(X)$. Seja $p \in X$. Devemos mostrar que f é contínua no ponto p. Seja V um aberto de $\mathbb{R}$ tal que $f(p) \in V$. Então $f(B_p) = \{f(p)\} \subset V$. Logo $f(B_p) \subset V$. Como B_p é vizinhança de p em X, conclui-se que f é contínua no ponto p e assim $f \in C(X)$. ■

Topologia da base irredutível sobre C(X)

Definições e notações

A álgebra C(X) de funções reais contínuas

Seja X um espaço de Alexandroff completamente regular e $\mathbb{R}$ a recta real dotada da sua topologia euclidiana. Em $\mathbb{R}$, denotaremos o intervalo aberto (respectivamente, fechado) de origem a e de extremidade b por (a, b) (respectivamente, [a, b]). Lembramos que um espaço de Alexandroff X é completamente regular, se e somente se X é regular, se e somente se cada fechado de X é aberto em X, se e só se a função característica χ de todo aberto não vazio de X é contínua (CASTRO, 2010); (EUSTACHE, 2013); (NTANTU, 2010); (SHIRAZI e GODESTANI, 2011). Assim, se U é um aberto de X e $p \in U$, existe uma função contínua $f: X \rightarrow [0,1]$, tal que $f(p) = 1$ e $f(X \setminus U)=0$. Por conseguinte, a álgebra C(X) das funções reais contínuas definidas num espaço de Alexandroff completamente regular X contém elementos suficientes para uma investigação científica de qualidade.

A parte motriz na álgebra C(X) é dada pelo Teorema 3 que afirma que $C(X) = \{f \in \mathbb{R}^X : f(B_p) =\{f(p)\}, \forall\, p \in X\}$. Assim, quando $f \in C(X)$ então $f(B_p) =\{f(p)\}, \forall\, p \in X$.

A topologia da base irredutível de C(X) (EUSTACHE, 2013)

Uma base da topologia da base irredutível

Sejam X um espaço de Alexandroff completamente regular, $p \in X$ e V um aberto de $\mathbb{R}$. Assumimos que $[B_p, V] = \{f \in C(X): f(B_p) \subset V\}$.

Se Q é um subconjunto de X e V é aberto de $\mathbb{R}$, assuma-se portanto que $[B_Q,V] =\left[\bigcup_{p\in Q} B_p, V\right] = \bigcap_{p\in Q}[B_p,V]$. Além disso, é facilmente mostrado que $[B_p,V_1 \cap V_2]= [B_p,V_1] \cap [B_p, V_2]$.

Do acima exposto, podemos definir com segurança uma topologia aceitável em C(X), tendo como sub-base dos abertos a seguinte família: $S_i=\{[B_p,V] : p \in X,\ V \text{ é aberto de } \mathbb{R}\}$. Como essa topologia é definida a partir da base irredutível, chamamo-la de *topologia da base irredutível sobre C(X)*. Denotamos C(X) munido dessa topologia por $C_i(X)$ (EUSTACHE, 2013).

Assim, W é um aberto de base de $C_i(X)$, se e somente se existe um subconjunto finito P = $\{p_1,p_2,...,p_n\}$ em X e abertos correspondentes $V_1,V_2, ...,V_n$ em ℝ tais que $W=[B_{p_1},V_1] \cap [B_{p_2}, V_2] \cap ... \cap [B_{p_n}, V_n]=[B_P,V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n]= [B_P,V]$, com $V=V_1 \cap ... \cap V_n$.

Logo, uma base de $C_i(X)$ é da forma = $[B_P,V]$, onde P é um subconjunto finito de X e V um aberto de ℝ. Em conclusão, podemos afirmar que a base dos abertos da topologia da base irredutível é dada pela família $B_i = \{[B_P,V]$: P é um subconjunto finito de X e V um aberto de ℝ$\}$.

Base de vizinhanças de um elemento de $C_i(X)$

Seja W uma vizinhança de base da função nula O_X. Então existe P finito em X e V aberto de ℝ tal que $0_X \in W = [B_P,V]$. Como $0 \in V$ e V é aberto em ℝ, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$. Como $\frac{1}{\varepsilon}>0$, pelo princípio de Arquimedes, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} > n$. Logo $\frac{1}{n} <\varepsilon$ e $-\frac{1}{n}>-\varepsilon$, isto é, $-\varepsilon <-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$. Logo, $0 \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset V$.

Assim $0_X \in \left[B_P, \left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right] \subset [B_P,V]$. Podemos dizer, portanto, segundo EUSTACHE (2013), que uma vizinhança de base de 0_X é da forma $[B_P, \left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)]$, onde P é um subconjunto finito de X.

Agora, consideramos $p \in X$, $\varepsilon > 0$ et $f \in C(X)$, e assumimos:

$<f,B_p,\varepsilon> =\{g \in C(X) : |g(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall\, x \in B_p\}$.
$=\{g \in C(X) : (|g - f|)(x) < \varepsilon , \forall\, x \in B_p\}$.
$=\{g \in C(X) : |g - f|(p) < \varepsilon \}$, (pois, $(g-f)(B_p)=(g-f)(p)$).
$=\{g \in C(X) : -\varepsilon < g(p) - f(p) < \varepsilon \}$.
$=\{g \in C(X) : f(p) - \varepsilon < g(p) < f(p) + \varepsilon \}$.
$=\{g \in C(X) : g(p) \in (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \}$.
$=\{g \in C(X) : g(B_p) \subset (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \}$(pois, $g(B_p)=g(p)$).
$=[B_p, V_{p,\varepsilon}]$ où $V_{p,\varepsilon} = (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$. Vê-se que $[B_p, V_{p,\varepsilon}]$ é aberto em $C_i(X)$.

Se P = $\{p_1,p_2,\dots p_n\}$ é um subconjunto finito de X, e se $V_{p_i,\varepsilon} = (f(p_i) - \varepsilon, f(p_i) + \varepsilon)$, então $<f,B_P,\varepsilon>=\bigcap_{i=1}^{n}\left[B_{p_i}, V_{p_{i,\varepsilon}}\right]$, que é uma vizinhança de base de f.

Em seguida, uma base de vizinhanças da função nula 0_X é dada por $\{<0_x,B_P,\frac{1}{n}> : P \subset X$ é finito e $n\in\mathbb{N}^*\}$. E uma base de vizinhanças de $f\in C(X)$ é da forma $=\{<f,B_P,\varepsilon> : P \subset X$ é finito e $\varepsilon>0\}$. Estabelecemos duas propriedades úteis dos conjuntos $<f,B_p,\varepsilon>$.

Propriedade 1

$<f,B_p,\varepsilon>$ é um subconjunto convexo de $C_i(X)$.

Prova

Seja $h,g\in<f,B_p,\varepsilon>$, $\lambda\geq 0$, $\mu\geq 0$ dos reais tais que $\lambda+\mu=1$. Mostramos que $\lambda h+\mu g\in<f,B_p,\varepsilon>$. Seja $q\in B_p$. Tem-se $|h(q)-f(q)|<\varepsilon, e\ |g(q)-f(q)|<\varepsilon$. Agora,
$|\lambda h(q)+\mu g(q)-f(q)| = |\lambda h(q)-\lambda f(q)+\lambda f(q)+\mu g(q)-\mu f(q)+\mu f(q)-f(q)|$
$=|\lambda[h(q)-f(q)]+\mu[g(q)-f(q)]+[(\lambda+\mu-1)f(q)]|$
$\leq|\lambda||h(q)-f(q)|+|\mu||g(q)-f(q)|$
$<|\lambda|\varepsilon+|\mu|\varepsilon=(|\lambda|+|\mu|)\varepsilon=(\lambda+\mu)\varepsilon=\varepsilon.$

Sendo isso verdadeiro para todo $q\in B_p$, tem-se $(\lambda h+\mu g)\in<f,B_p,\varepsilon>$. Logo $<f,B_p,\varepsilon>$ é uma parte convexa de C(X). ■

Propriedade 2

$\{f\}=\bigcap\{<f,B_p,\varepsilon> : p\in X$ e $\varepsilon>0\}$. Em particular $\{0_x\}=\bigcap\{<0_x,B_p,\frac{1}{n}> : p\in X$ e $n\in\mathbb{N}^*\}$.

Prova

Seja $g\in<f,B_p,\varepsilon>$ $\forall\ p\in X$ e $\varepsilon>0$
$\Rightarrow|g(q)-f(q)|<\varepsilon\ \forall\ q\in B_p\ \forall\ \varepsilon>0$
$\Rightarrow|g(q)-f(q)|<\frac{1}{n}\ \forall\ q\in B_p\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$
$\Rightarrow g(q)=f(q)\ \forall\ q\in B_p$
Em particular $g(p)=f(p)$ $\forall\ p\in X$, o que mostra que $g=f$.

Portanto $\{f\}=\bigcap\{<f,B_p,\varepsilon> : \varepsilon>0,\ p\in X\}$.■

Propriedade 3

Sejam X um espaço de Alexandroff completamente regular, $p\in X$ e V um aberto não vazio de $\mathbb{R}$. Então $[B_p,V]$ é não vazio.

Prova

Como X é completamente regular, a função característica χ de B_p é contínua. Como V é um aberto não vazio de $\mathbb{R}$, sejam $a < b$ dois reais tais que $[a,b]\subset V$. Considera $\sigma : [0,1]\to [a,b]$ um caminho de origem a e de extremidade b. Essa função é contínua. Assumimos que $f = \sigma \circ \chi : X\to\mathbb{R}$ o composto dessas duas funções. Então, $f\in C(X)$ e $f(B_p)=b\in V$. Portanto $f\in[B_p,V]$.■

Propriedade de densidade

Teorema 4

$\mathbb{R}_i^X \leq \mathbb{R}_p^X$ *se e somente se B_P é um subconjunto finito de X para toda parte finita P de X.*

Prova

Se $B_P=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$ é um subconjunto finito de X, então $[B_P,V] = [p_1,V]\cap[p_2,V]\cap \ldots \cap [p_n,V]$ que é um aberto de $\mathbb{R}_p^X$. Logo $\mathbb{R}_i^X \leq \mathbb{R}_p^X$.

Para a reciproca, suponhamos que $\mathbb{R}_i^X \leq \mathbb{R}_p^X$. Seja P um subconjunto finito de X. Mostramos que B_p é finito. Como $[B_p,(-1,1)]$ é vizinhança de 0_x em $\mathbb{R}_i^X$, e que $\mathbb{R}_i^X \leq \mathbb{R}_p^X$, então $[B_p,(-1,1)]$ é uma vizinhança de 0_x em $\mathbb{R}_p^X$. Seja então A finito em X e $\varepsilon>0$ tal que $0_x\in< 0_x ,A, \varepsilon >\subset[B_p,(-1,1)]$. Mostramos que $B_p\subset A$. Suponhamos por absurdo que existe $q\in B_p/q\notin A$. Definimos $f :X\to\mathbb{R}$ tal que $f(A) =0$ e $f(q)=1$. Claramente $f\in< 0_x ,A, \varepsilon >$ mas $f\notin[B_p,(-1,1)]$ pois $f(q)=1\notin(-1,1)$. Daí $B_p\subset A$ como procurado. B_p é finito.

Teorema 5

Se X é um espaço de Alexandroff completamente regular, então $C_i(X)$ é denso em $\mathbb{R}_i^X$

Prova

Mostramos que $\overline{C(X)} = \mathbb{R}_i^X$. Para tal tomamos $f\in\mathbb{R}^X$. Seja $P\subset X$ finito e V aberto de $\mathbb{R}$ tais que $f\in[B_P,V]$. Como $f(P) \subset V$, tem-se $f(p)\in V$ para todo $p\in P$. Seja então $p\in P$ e seja $\varepsilon>0$ tal que $[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]\subset V$ e seja $\sigma :[0,1]\to[f(p)-\varepsilon,f(p)+\varepsilon]$ um caminho de origem $f(p)-\varepsilon$ e de extremidade $f(p)+\varepsilon$ em $\mathbb{R}$. Como P é finito e $P\subset B_P$, pela regularidade completa de X, a função característica de B_p é contínua. Chamamos esta função característica $g :X\to\mathbb{R}$ tal que $g(B_p)=\{1\}$ e $g(X\backslash B_P)=\{0\}$. Pela continuidade de g, tem-se $g(P)=g(B_P)$. Seja $h=\sigma o g$. Então $h\in C(X)$ e $h(B_P)$

$=\sigma(g(B_P))=\sigma(g(P))=\sigma(1)=f(p)+\varepsilon\in V$. Logo, $h(B_P)\subset V$, o que mostra que $h\in[B_P,V]$. Assim, $h\in C(X)\cap[B_P,V]$. Portanto $f\in\overline{C(X)}$. Isso prova que $\mathbb{R}_i^X\subset\overline{C(X)}$.

Como a inclusão $\overline{C(X)}\subset\mathbb{R}_i^X$ é óbvia, tem-se então igualdade $\mathbb{R}_i^X=\overline{C(X)}$. Em conclusão, temos que C(X) é denso em $\mathbb{R}_i^X$. ■

Demonstra-se em [3] que $C_i(X)$ satisfaz os axiomas de separação como a separação e a regularidade completa, qualquer que seja o espaço de Alexandroff X.

Com isso, podemos agora tratar de algebrizar o espaço $C_i(X)$, analogamente com (CASTRO, 2010) e (EUSTACHE, 2013).

A álgebra topológica de $C_i(X)$

Espaço vectorial C(X)

Lembramos ao leitor que se definem três leis de composição que outorgam a C(X) a estrutura de $\mathbb{R}$-álgebra. Trata-se de:

- a adição φ :$C(X)xC(X)\rightarrow C(X)$ onde $\varphi(f,g) = f+g : X\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $\forall x\in X$;
- a multiplicação $\psi : C(X) \times C(X) \rightarrow C(X)$ onde $\psi(f,g) = f.g : X\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\forall x\in X$;
- a multiplicação por um escalar $\mu : \mathbb{R} \times C(X)\rightarrow C(X)$ onde $\mu(r,f)= r.f : X\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $(rf)(x) = r\, f(x)$, para todo $f\in C(X)$, $r\in\mathbb{R}$ e $x\in X$.

A continuidade da adição em $C_i(X)$

Uma propriedade análoga pode ser vista em (SHIRAZI e GOLESTANI, 2011). Podemos satisfazer a alostro.

Teorema 8

A adição φ: $C_i(X) \times C_i(X) \rightarrow C_i(X)$, onde $\varphi(f,g) = f+g$; é uma aplicação contínua.

Prova

Seja $(f_0,g_0)\in C(X) \times C(X)$. Mostramos que φ é contínua no ponto (f_0,g_0). Seja $W = < f_0 +g_0, B_P , \varepsilon >$ uma vizinhança de φ $(f_0,g_0) = f_0+g_0$ em $C_i(X)$ onde P é um subconjunto finito em X e $\varepsilon > 0$. Então $U= < f_0, B_P, >$ é uma vizinhaça de f_0 e $V = <g_0, B_P , \frac{\varepsilon}{2}>$ é uma vizinhança de g_0 em $\frac{\varepsilon}{2}$ $C_i(X)$ de tal maneira que $U\times V$ é vizinhança de (f_0,g_0) em $C_i(X) \times C_i(X)$. Mostramos que $\varphi(U\times V)$ é incluido em W. Para tal, seja $(f,g)\in U\times V$. Então $|f – f_0|< \frac{\varepsilon}{2}$ e $|g – g_0|< \frac{\varepsilon}{2}$ no B_P. Daí $|(f+g) – (f_0 +g_0)| \leq |f - f_0|+|g – g_0|< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ em B_P. Isso mostra que $\varphi(f,g)\in W=<f_0+g_0,B_P, \varepsilon>$. Daí a inclusão desejada. Assim, φ é contínua no ponto (f_0,g_0). ■

Corolário 3

Seja $f\in C(X)$ e T_f: $C_i(X)\rightarrow C_i(X)$ tais que $T_f(g) = f+g$. Então a translação T_f é um homeomorfismo.

Prova

T_f é claramente bijectiva e sua inversa é a aplicação

T_{-f}: $C_i(X) \rightarrow C_i(X)$ *tais que* $T_{-f}(g) = g-f$. Pois $(T_f \circ T_{-f})(g)=T_f\left(T_{-f}(g)\right)=T_f(g-f)=(g-f)+f=g$, $\forall$ $g\in C_i(X)$.

Para a continuidade de T_f(respectivamente T_{-f}), basta de observar que a continuidade da adição φ: $C_i(X)$ x $C_i(X)\rightarrow C_i(X)$, implique a continuidade da sua restrição $\varphi|_{\{f\}xCi(X)}$:$C_i(X)\times C_i(X)\rightarrow C_i(X)$ (respectivamente $\varphi|_{\{-f\}xCi(X)}$ $C_i(X)\times C_i(X)\rightarrow C_i(X)$ no sub-espaço topológico $\{f\}xC_i(X)$ (respectivamente $\{-f\}xC_i(X)$ de $C_i(X)$ $xC_i(X)$.■

Corolário 4

Para todo espaço X, $C_i(X)$ é um espaço homogéneo.

Prova

Sejam f,g dois elementos de $C_i(X)$. Então T_{f-g} é um homeomorfismo que envia g sobre f.■

Consequência

Se W é uma vizinhança de 0_x então $f+W=\{f+g : g\in W\}$ é vizinhança de f.

A continuidade da multiplicação em $C_i(X)$ ([2], mas uma prova similar encontra-se em [4])

Teorema 9

A multiplicação $\psi : C_i(X) \times C_i(X) \rightarrow C_i(X)$ *onde* $\psi(f,g)=fg$ *; é uma aplicação contínua*

Prova ([3])

Seja $(f_0,g_0)\in C(X) \times C(X)$. Mostramos que ψ é contínua no ponto (f_0,g_0). Seja $W = <f_0\, g_0, B_P , \varepsilon>$ uma vizinhança de $\psi(f_0,g_0) = f_0\, g_0$ em $C_i(X)$ onde P é um conjunto finito em X e $\varepsilon > 0$. Tomamos $\varepsilon <1$ e assumimos $M = \max \{|f_0(x)|+|g_0(x)| : x\in B_P\}$. Escolhemos um real δ tal que $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{M+1}$. Vê-se que $\delta < 1$. Então $U = <f_0, B_P, \delta>$ e $V = <g_0, B_P, \delta>$ são das vizinhanças de f_0 e g_0 respectivamente. Mostramos que $\psi(UxV) \subseteq W$. Seja $(f,g)\in U \times V$. Mostra-se que $\varphi(f,g) = f\, g \in W = <f_0\, g_0, B_P, \varepsilon>$, isto é, $|fg - f_0g_0|< \varepsilon$ em B_P. Calculando $|fg - f_0g_0|$ em B_P.

Tem-se:
$$
\begin{aligned}
|fg - f_0g_0| &= |f_0(g - g_0) + g_0(f - f_0) + (f - f_0)(g - g_0)| \\
&\leq |f_0(g - g_0)| + |g_0(f-f_0)| + |(f - f_0)(g - g_0)| \\
&\leq |f_0||g - g_0| + |g_0||f - f_0| + |f - f_0||g - g_0| \\
&\leq |f_0|\, \delta + |g_0|\, \delta + \delta.\delta \\
&\leq \delta\, (|f_0| + |g_0| + 1) \\
&\leq \delta\, (M + 1) \\
&< \frac{\varepsilon}{M+1}(M+1) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Daí $|fg - f_0g_0|< \varepsilon$ em B_P; o que significa que $fg\in W$.

Assim, $\psi(f,g)\in W$ e ψ é contínua no ponto (f_0, g_0).■

A continuidade da multiplicação por um escalar

Teorema 10

A multiplicação por um escalar μ*:* $\mathbb{R} \times C_i(X)\rightarrow C_i(X)$ *onde* $\psi(r,f)=rf$*, é uma aplicação contínua*.

Prova

A prova desse teorema é similar à do teorema 9 identificando cada real r à função constante que envia cada x de X no real r.■

Portanto, pelos teoremas anteriores, podemos dizer que $C_i(X)$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra topológica qualquer que seja o espaço de Alexandroff X (EUSTACHE, 2013); (NTANTU, 2010) e (SHIRAZI e GODESTANI. 2011).

Conclusões

Acabamos de mostrar que Ci(X), dotado das leis bem definidas, é uma álgebra sobre o espaço de Alexandroff X. Como em toda C(X)-teoria, e para que o estudo seja concluído, estudaremos, num outro momento, as propriedades topológico-algébricas de C(X). Aqui o problema fundamental será a caracterização das propriedades P de Ci(X) em função das propriedades duais Q de X de modo que se obtenha uma afirmação do tipo: "A álgebra topológica Ci(X) satisfaz a propriedade P se e somente se o espaço topológico X possui a propriedade Q".

Referências bibliográficas

CASTRO J.E.R. 2010, Topologies de Alexandroff : tres puntos de vista diferentes, Tesis de Magister en Ciencias Matematicas. Universidad Nacional de Columbia.

GRAWERT P.W. 1998, Funciones de dimension en Espacios de Alexandroff, Tesis de doctorado en Ciencias Matematicas. Universidad Autonoma Metropolitana, Mexico.

EUSTACHE, M.K.B. 2013, « Sur les espaces d’Alexandroff e quelques applications », Thèse de Doctorat en Sciences, UPN.

SHIRAZI A.Z. and GOLESTANI N. 2011, Functional Alexandroff Spaces, Hacettepe J. of Math and Statistics, Vol.40, 515-522.

NTANTU I. 2010, La continuité dans les espaces d’Alexandroff, CRUPN, n°042, 281-284

Sínteses curricular do autor

Ph.D. Eustache Makambo: É Doutor em Ciências Matemáticas pela Université Pedagogique Nationale de Kinshasa (RDC) no campo das Matemáticas puras com orientação Análise Funcional, Diplomado de Estudos Avançados em Matemáticas Aplicadas pela mesma universidade, foi coordenador de Curso de Ensino de Matemática na Escola Superior Politécnica de Lunda Sul, leciona várias cadeiras de Matemática na mesma escola nos cursos de engenharia e é Professor de curso de Pós-graduação.