Comportamento topológico dos espaços de Alexandroff

Topological behavior of Alexandroff spaces

Makambo Kapusa Bo Eustache [1*]

[1] PhD. Escola Superior Politécnica de Lunda Sul. makambostch87@gmail.com

[*]Autor para correspondência: makambostch87@gmail.com

RESUMO

O nosso estudo circunscreve-se a um exame profunda de algumas propriedades topológicas ou invariantes topológicas dos espaços de Alexandroff. Como ponto de partida, caracterizamos os espaços de Alexandroff pela sua base irredutível e em seguida, estudamos as propriedades P, tais que, se os espaços de Alexandroff X e Y são homeomorfos, então Y goza também da propriedade P. Tratamos então da conexidade, da conexidade local e por arcos, da compacidade, da normalidade, da regularidade, da regularidade completa, da propriedade de Baire e da propriedade de Lindelöff.

Palabras clave: espaços de Alexandroff, propriedades topológicas, base irredutível, espaços finitos de Alexandroff.

ABSTRACT

We caracterize an Alexandroff space by its irreductible basis and then we examine specifically some topological properties, the topological invariants. We say that if an Alexandroff space X is homeomorphic to another Alexandroff space Y and if X has some property P, then Y gets too the same property P. We study for instance separation, connectness, local connectness, compactness, normality, regularity, complete regularity, Baire property and Lindelöff property. We show in particular that for Alexandroff spaces, regularity and complete regularity are equivalent; connectness and path-connectness either.

Keywords: *Alexandroff spaces, topological properties, irreductible basis, Finite Alexandroff spaces.*

INTRODUÇÃO

Os espaços de Alexandroff foram introduzidos em 1937 por Pavel Sergeevitch Alexandroff no seu artigo intitulado "Diskrete räume" (Arenas, F.,1999), (Cauty, R., Dobrowolski, T. and Marciszewski, W., 1993) e (Eustache, M., 2013) onde ele trata, pela primeira vez, dos espaços discretos hoje conhecidos por "espaços de Alexandroff". Estes espaços são hoje em dia muito utilizados em Informática.

Segundo F. Arenas (1999) e M. Eustache (2013), P.S. Alexandroff contribuiu notavelmente no desenvolvimento da Teoria dos conjuntos, da Topologia e a ele devemos a noção de espaços compactos.

Por espaço de Alexandroff X entende-se todo espaço topológico (X, τ) em que toda intersecção arbitrária duma família (finita ou infinita) de abertos é ainda um aberto (Arenas, F.G.,1999) e (Eustache, M., 2013). Neste caso a topologia τ é dita "topologia de Alexandroff" e ao espaço X denominamos também por "A-espaço" ou simplesmente "Alexandroff".

Os espaços discretos e os espaços topológicos finitos são, portanto, todos espaços de Alexandroff (Stong R., 1966). Além do mais, todo o Alexandroff é um P-espaço, isto é, um espaço no qual todo o subconjunto G_δ é um aberto. (Arenas, F.,1999) e (Stong R., 1966)

No que se segue, fez-se apenas uma abordagem que abrange uma primeira parte sobre o comportamento topológico nos espaços de Alexandroff, onde uma segunda parte tratará da conexidade, normalidade, compacidade, regularidade e outras invariantes topológicas.

Seja X um espaço de Alexandroff e seja $p\in X$. Assumimos, conforme se mostra em [5], [1] e [20], que num Alexandroff X, $B_p=\cap\{V\subset X$: V aberto de X e $p\in X\}$ e $F_p=\cap\{S\subset X$: S fechado de X e $p\in X\}$. B_p é o menor aberto de X contendo p e F_p é o menor fechado de X contendo p. Estes dois conjuntos têm um papel capital nos espaços de Alexandroff, em particular na continuação dos nossos trabalhos. Temos o seguinte resultado.

Da entrada do jogo, mostramos que o segredo dos espaços de Alexandroff reside na base irreductível que desempenha o papel de DNA no corpo humano. (Stong R., 1966), (Ntantu, I., 2010) e (Eustache, M., 2013).

Teorema 1.1.

Seja X um espaço topológico. Então X é um espaço de Alexandroff se e só se $\{B_p: p\in X\}$ é uma base dos abertos de X.

Prova:

Suponhamos que X seja um espaço de Alexandroff e sejam V um aberto de X e $p\in V$. Por hipótese, B_p é um aberto de X e ele é o menor aberto de X contendo p. De onde, $p\in B_p\subset V$. O que mostra que a família $\{B_p: p\in X\}$ é uma base dos abertos de X.

Reciprocamente, suponhamos que a família $\{B_p: p\in X\}$ seja uma base dos abertos de X. E seja $\{V_\alpha: \alpha\in\Gamma\}$ uma família qualquer de abertos de X. Assumimos que $V = \cap\{V_\alpha: \alpha\in\Gamma\}$ e mostramos que V é um aberto de X.

1º Caso: $V = \varnothing$, não há nada a mostrar.

2º Caso: $V \neq \varnothing$. Seja $p\in V$, então $p\in V_\alpha$, $\forall\alpha\in\Gamma$. Daí $p\in B_p\subset V_\alpha$, $\forall\alpha\in\Gamma$ e assim $p\in B_p\subset V$. O que mostra que V é vizinhança de p. Como p é qualquer em V, então V é vizinhança de cada um dos seus pontos. Isto é, V é um aberto de X. Portanto X é um Alexandroff.

Seja X um espaço de Alexandroff. A base $\mathbf{B}=\{B_p: p\in X\}$ no sentido do teorema acima denomina-se "base irreductivel" de X e caracteriza os espaços de Alexandroff ([05] e [06]). De facto, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.

Toda a topologia de Alexandroff admite uma base irreductível.

Prova:

Seja X um espaço de Alexandroff. A família **B**={B_p: p∈X}, onde B_p *é o menor aberto contendo p*, é uma base irreductível de X.
Se τ é uma topologia de Alexandroff sobre um conjunto não vazio X. Se τ* = {S⊂X: (X\S)∈τ}, e se τ* forma uma topologia sobre X, τ* denomina-se nesse caso a "co-topologia" de τ ([05], [06] e [20]).
Teorema 2.3.3.
Seja τ uma topologia sobre X. τ é uma topologia de Alexandroff se e só se τ admita uma co-topologia sobre X.
Prova
Se τ é uma topologia de Alexandroff sobre X e τ* = {S⊂X: (X\S)∈τ} é o conjunto dos fechados de (X, τ), tem-se obviamente que ∅∈τ* e X∈τ* por definição de τ*.
Se A, B∈τ*, então (X\A)∈τ e (X\B)∈τ. Daí, (X\A)∪(X\B) = [X \ (A∩B)]∈τ. Portanto A∩B∈τ*.
Do mesmo modo, se A_α∈τ*∀α∈Γ, então (X\$A$)∈τ∀$\alpha$∈Γ. Como τ é uma topologia de Alexandroff sobre X, segue-se que ∩{X\$A_\alpha$: α∈Γ} = X \ (∪ A_α)∈τ. O que mostra que ∪{$A_\alpha : \alpha$∈Γ}∈τ*. Assim τ* é uma topologia de Alexandroff sobre X.
Reciprocamente, suponhamos que τ admita uma co-topologia τ*. Mostramos que τ é uma topologia de Alexandroff.
Seja {V_i : i∈I} uma família de abertos de (X, τ). Precisamos mostrar que ∩{V_i: i∈I} é um aberto em (X,τ) isto é seu complemento é fechado. Pelas leis de De Morgan, tem-se: X \ (∩{V_i: $i \in I$}) = ∪(X \ V_i: i∈I}∈τ* pois cada (X \ V_i)∈τ*, τ* sendo uma topologia por hipótese.
Daí X \ (∩{V_i: $i \in I$}) é fechado em (X, τ) e portanto ∩{V_i: $i \in I$} é aberto em (X, τ). O que mostra que τ é uma topologia de Alexandroff.
Esta propriedade é apenas válida para espaços de Alexandroff. Assim, para F_p=∩{S⊂X: S fechado de X e p∈X} a família {$F_p : p \in X\}$ é uma base dos abertos da co-topologia τ.

DESENVOLVIMENTO

O comportamento topológico dos espaços de Alexandroff

Começamos o nosso trabalho definindo uma relação de ordem pela seguinte regra: "q≤p se e só se q∈B_p" fazendo de X um T_0-espaço. Portanto (X,≤) é um conjunto ordenado (poset). Reciprocamente, mostramos que se (X,≤) é um conjunto ordenado, então fazendo B_p = {q∈X: q≤p}, obtém-se uma base irredutível β = {$B_{p:\ p}$∈X} para uma T_0-topologia de Alexandroff em X. Essa correlação entre espaço de Alexandroff e conjunto ordenado (poset) gera muitas aplicações em Informática teórica.

Continuando a nossa análise dos espaços de Alexandroff, damos a caracterização de algumas propriedades topológicas tais como a conectividade, a conectividade por arcos, os axiomas de separação T_1 e T_2, a regularidade e a regularidade completa, a normalidade, a compacidade, a propriedade de Lindelöff e outras propriedades gerais dos espaços Alexandroff. Mostramos em particular, que a conexão é igual a conectividade por arcos, que a regularidade é igual à regularidade completa e que em geral um espaço de Alexandroff não é homogéneo. Todas estas ideias, serão utilizados proveitosamente num trabalho já em preparação. No entanto, a parte 1 não abrange todas estas propriedades; trataremos da normalidade, compacidade e outras propriedades como a invariância da cardinalidade e a propriedade de Lindeloff na parte 2.

Lembre que um espaço topológico X é dito T_0-espaço se e só se, para todos pontos x ≠ y em X, existe um aberto contendo um dos pontos e não o outro. Para um espaço T_0-espaço de Alexandroff, temos o seguinte teorema. Todas as demonstrações que seguem podem ser consultadas em [05] e são originais.

Teorema 2.1. *Sejam p e q dois pontos distintos de um T_0 – espaço de Alexandroff X. Então:*

1) $p \in Bq \Rightarrow q \notin Bp$
2) $p \in Fq \Rightarrow q \notin Fp$.

3) $p \in Fq \Leftrightarrow q \in Bp$

Prova

(1) Suponhamos que $p \in B_q$. Mostramos que $q \notin B_p$. Se $q \in B_p$, como X é T_0, existe um aberto U de X tal que $p \in U$ e $q \notin U$ ou existe um aberto V de X tal que $q \in V$ e $p \notin V$. No primeiro caso, $B_p \subset U$ e $B_q \subset B_p \subset U$. Portanto $q \in U$, o que é uma contradição. No segundo caso, tem-se $B_q \subset V$ e $p \in B_q \subset V$, logo $p \in V$, o que também é uma contradição. Portanto se $p \in B_q$, então $q \notin B_p$.

(2) Se $p \in F_q$, suponhamos por absurdo que $q \in F_p$. Como X é T_0, existe um aberto U tal que $p \in U$ e $q \notin U$ ou existe um aberto V tal que $q \in V$ e $p \notin V$. No primeiro caso, $q \notin U \Rightarrow q \in X \backslash U$ fechado $\Rightarrow F_q \subset X \backslash U \Rightarrow F_q \cap U = \phi$. Como $p \in U$, então $p \notin F_q$. Contradição com $p \in F_q$. No segundo caso, $p \notin V \Rightarrow p \in X \backslash V$ fechado $\Rightarrow F_p \subset X \backslash V \Rightarrow F_p \cap V = \phi$. Como $q \in F_p$, então $q \notin V$, contradição com $q \in V$. Assim, se $p \in F_q$ então $q \notin F_p$.

(3) $q \notin Bp$ q se e somente se $p \in X \backslash Bp$. Como $X \backslash Bp$ é fechada e não contém p então $p \notin Fq$. Da mesma forma $p \notin Fq \Rightarrow q \notin Bp$

Teorema 2.2. *Seja X um espaço de Alexandroff. Então X é T_0 – espaço se e somente se « $\forall$ p, q $\in$ X, $B_q = B_p \Rightarrow q=p$».*

Prova

Suponhamos que X seja um T_0–espaço. Se $q \neq p$, então existe um aberto V de X tal que $q \in V$ mas $p \notin V$ (ou $p \in V$ mas $q \notin V$). De onde $B_q \subset V$ (ou $B_p \subset V$). No primeiro caso $p \notin B_q$ e no segundo caso $q \notin B_p$. O que implica que $B_q \neq B_p$.

Reciprocamente, suponhamos que «$\forall$ p, $q \in X$, $B_q = B_p \Rightarrow q=p$». Para ver que X é um T_0-espaço, seja $p \neq q$ dois elementos distinctos de X. Então pela hipótese $B_q \neq B_p$.

Temos dois casos:

Cas 1 :$B_p \cap B_q = \varnothing$.

Nesse caso, B_p é uma é uma vizinhança de p tal que $q \notin B_p$ e B_q é uma vizinhança de q tal que $p \notin B_q$.

Cas 2 : $B_p \cap B_q \neq \varnothing$.

Tem-se as seguintes possibilidades:

i) $p \in B_p \cap B_q$ e $q \notin B_p \cap B_q$: nesse caso, $B_p \cap B_q$ é uma vizinhança de p não contendo q.

ii) $p \notin B_p \cap B_q$ e $q \in B_p \cap B_q$: nesse caso, $B_p \cap B_q$ é uma vizinhança de q não contendo p.

iii) $p \notin B_p \cap B_q$ e $q \notin B_p \cap B_q$: nesse caso, B_q é uma vizinhança de q não contendo p e B_p é uma vizinhança p que não contém q.

iv) $p \in B_p \cap B_q$ e $q \in B_p \cap B_q$: nesse caso, $B_p \subset B_p \cap B_q \subset B_q$ e $B_q \subset Bp \cap B_q \subset B_p$. De onde $B_p \subset B_q \subset B_p$, o que obriga a igualdade $B_p = B_q$. O que contrediz a nossa hipotese. Este caso está portando excluido.

Em conclusão, X é um T_0-espaço.

Teorema 2.3. *Assumimos que X é um T_0-espaço de Alexandroff. Então a relação definida por «$q \leq p \Leftrightarrow q \in F_p$ $\forall p,q \in X$» é uma relação de ordem sobre X.*

Prova

- Reflexividade: $p \leq p$ pois $p \in F_p$, $\forall$ $p \in X$.
- Transitividade: suponhamos que $q \leq p$ e $p \leq r$. Mostramos que $q \leq r$.

Tem-se: $q \leq p \Leftrightarrow q \in F_p$ e $p \leq r \Leftrightarrow p \in F_r$. Mostramos que $q \in F_r$. $q \in F_p \Rightarrow F_q \subset F_p$ e $p \in F_r \Rightarrow F_p \subset F_r$. Daí $q \in F_q \subset F_p \subset F_r \Rightarrow q \in F_r$ isto é, $q \leq r$. Logo a transitividade.

- Antisimetria: Deve-se mostrar que $p \leq q$ e $q \leq p \Rightarrow p=q$.

De facto, tem-se q $\in F_p$ e p $\in F_q$ significa $F_q \subset F_p$ e $F_p \subset F_q$ isto é, $F_p = F_q$. Se $p \neq q$, pelo Teorema II.1.4.3 acima, como $p \in F_q$, deve haver-se que $q \in F_p$, o que contradiz $F_p = F_q$. Logo p=q. Portanto a antissimétrica e assim, $(X, \leq)$ é um conjunto ordenado.

Observações

1) A relação de ordem dada no teorema acima pode também ser definida por "$q \leq p \Leftrightarrow p \in B_q$" . (Stong R., 1966), (Ntantu, I., 2010) e (Eustache, M., 2013)

2) Para a relação $\leq$, o espaço considerado deve necessariamente ser um T_0-espaço. De facto, seja por exemplo, $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, X\}$ e assumimos que X não é um T_0-espaço. Temos: $B_1 = B_2 = \{1,2\} \Rightarrow 1 \leq 2$ e $2 \leq 1$ mas $2 \neq 1$.

Em [07], é possível ver umas demonstrações semelhantes, mas numa abordagem um pouco diferente.

Teorema 2.3. *Assuma que X um espaço de Alexandroff e $(p, q) \in X$. Então:*

1. $p \in F_q \Leftrightarrow q \in B_p$
2. $Fp \subseteq Fq \Leftrightarrow Bq \subseteq Bp$

Prova

(1) Suponha $p \in F_q$. Se $q \in B_p$ então $q \in X \backslash B_p$ fechado $\Rightarrow F_q \subset X \backslash B_p$. Mas $p \in F_q$. Logo $p \notin B_p$; o que é uma contradição. Portanto $q \in B_p$.

Reciprocamente suponha $q \in B_p$. Se $p \notin F_q$ então $p \in X \backslash F_q$ aberto $\Rightarrow B_p \subset X \backslash F_q$. Mas $q \in B_p$. Logo $q \notin F_q$, que ainda é uma contradição. Logo $p \in F_q$. Tem-se assim: $p \in F_q \Leftrightarrow q \in B_p$.

(2) Suponha que $F_p \subset F_q$ e mostramos que $B_q \subset B_p$. Mas $Bq \subset Bp \Leftrightarrow q \in B_p$. Suponhamos por absurdo que $q \notin B_p$. Então $q \in X \backslash B_p$ e $X \backslash B_p$ é fechado; de onde tem-se $F_q \subseteq X \backslash B_p$ Mas por hipotese $F_p \subseteq F_q$, logo $p \in F_p \subset F_q \subseteq X \backslash B_p$ o que é inaceitável pois $p \in B_p$. Por conseguinte $q \in B_p$, isto é, $B_q \subseteq B_p$.

Reciprocamente, suponhamos que $B_q \subset B_p$ e mostramos que $F_p \subset F_q$. Suponhamos o contrário, isto é, $p \notin F_q$. Então $p \in X \backslash F_q$ que é aberto. Logo $B_p \subset X \backslash F_q$. Por hipotese tem-se $B_q \subset B_p$. De onde $q \in B_q \subset X \backslash F_q$

que mostra que $q \notin F_q$, isto é, o que é absurdo. Portanto $F_p \subset F_q$

Teorema 2.4. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado não-vazia. Por tudo $p \in X$, definimos $B_p = \{q \in X : p \leq q\}$. Então, $\beta = \{B_p : p \in X\}$ é uma base para uma T_0-topologia de Alexandroff em X.*

Prova

Se $x \in B_p$ e $x \in B_q$, então $p \leq x$ e $q \leq x$. De onde $x \in B_x \subset B_p \cap B_q$. O que mostra que $\beta = \{B_p : p \in X\}$ é uma base para uma topologia em X. Para ver que essa topologia é uma topologia de Alexandroff, assumimos que $\{B_i : i \in I\}$ seja uma família qualquer de abertos. Mostramos que a sua intersecção é ainda um aberto. Definimos $B = \bigcap \{B_i : i \in I\}$. Se $p \in B$, então $p \in B_p \subset B_i$ para todo $i \in I$ e $B_p \subset \bigcap B_i = B$. De onde $B \subset (\bigcup \{B_p : p \in B\}) \subset (\bigcap \{B_i : i \in I\}) = B$. Por conseguinte $B = \bigcup \{B_p : p \in B\}$, e assim B é aberto. Portanto essa topologia é de Alexandroff. Resta-nos mostrar que ela é T_0. Para tal, suponamos que $B_p = B_q$, então $q \leq p$ e $p \leq q$. Como $\leq$ é uma relação de ordem, ela é antisimétrica. Em seguida as desigualdades $q \leq p$ e $p \leq q$ impliquem a igualdade p=q. Portanto X é um T_0-espaço.

Conectividade nos espaços de Alexandroff

Nessa secção, vamos mostrar que todo espaço de Alexandroff é localmente conexo e que ele é conexo se e somente se ele é conexo por arcos. (Arenas, F.,1999), (Stong R., 1966), (Schmets, J., 1976) e (Eustache, M., 2019)

II.2.1.1. Teorema

Todo espaço de Alexandroff X é localmente conexo.

Prova

Basta mostrar que cada B_p é conexo para todo $p\in X$. Assumimos portanto que $p\in X$ e suponhamos por absurdo que B_p não é conexo. Seja V e W dois abertos não vazios e disjuntos de B_p tal que $B_p = V\cup W$. Então há dois abertos V 'e W' em X tais que V $V'\cap B_p$ e $W=W'\cap B_p$. Logo $B_p=(V'\cap B_p)\cup(W'\cap B_p)= B_p\cap(V'\cup W')$. Como $p\in B_p$, então $p\in(V'\cup W')$. Se $p\in V'$, tem-se $B_p\subset V'$. Logo $B_p\subset V\subset B_p \Rightarrow B_p=V\Rightarrow W=\varnothing$. Contradição. Do mesmo modo, se $p\in W$ ', mostramos que Bp = W; de onde vem $V =\varnothing$. Contradição. Em conseguinte, Bp deve ser conexo; portanto X é localmente conexo.

II.2.1.2. Teorema

Seja X um espaço de Alexandroff e $p\in X$. Então B_p é conexo e conexo por arcos.

Prova

Já mostramos no teorema II.2.1.1 acima que a B_p é conexo.

Para a conectividade por arcos de B_p, seja $q\in B_p$. Mostramos que há um caminho σ unindo p a q. Definimos σ: $[0,1] \rightarrow X$ por $\sigma(t) = q$ se $0\leq t<1$ e $\sigma(1) = p$. Se mostrarmos que σ é contínua, então σ será um caminho de origem $\sigma(0) = q$ e de extremidade $\sigma(1) = p$. Seja V um aberto de X. Mostramos que $\sigma^{-1}(V)$ é aberto em I = [0,1].

Distinguimos três casos:

Caso 1: $q\notin V$ e $p\notin V$. Nesse caso, vê-se que $\sigma^{-1}(V)=\varnothing$ que é aberto em I = [0,1].

Caso 2: $q\in V$ e $p\notin V$. Nesse caso, $\sigma^{-1}(V) = [0,1)$, que é aberto em I = [0,1], pois $[0,1) = [0,1]\cap(-\infty, 1)$.

Caso 3: $p\in V$. Nesse caso, tem-se $B_p\subset V$. Como $q\in Bp$ por hipótese, então $q\in B_p\subset V\Rightarrow q\in V$. Portanto $p\in V$ e $q\in V$ mostram que $\sigma^{-1}(V) =[0,1]$, que é aberto em [0,1].

Assim, temos de mostrar que $\sigma^{-1}(V)$ é aberto em [0,1] para cada V aberto de X. Logo σ é contínua em [0,1].

Por conseguinte σ é um caminho juntando q a p. Note que $\sigma[0,1]\subset Bp$ pois $\sigma([0,1)) = \{q\}$ e $\sigma(1) = p$.

II.2.1.3. Teorema

*Seja **X** um espaço de Alexandroff. Então, X é conexo se e somente se X é conexo por arcos.*

Prova

Se X é conexo por arcos, sabe-se já que ele é conexo por arcos.

Reciprocamente, suponhamos X conexo. Mostramos que X deve ser conexo por arcos. Sabemos que por hipótese X é conexo por arcos. Como cada B_p é conexo por arcos pelo teorema II.2.1.2, então X é localmente conexo por arcos.

Agora, um espaço conexo que é conexo por arcos deve ser conexo por arcos. Portanto X é conexo por arcos.

Definições 2.7. :Sejam X um espaço de Alexandroff e, p e q dois pontos de X. Chamamos caminho de origem p e de extremidade q, todo subconjunto finito S_{pq} $=\{p=p_0,p_1,\ldots,p_n=q\}$ de X, onde p_i são pontos de X que satisfazem a relação: $p_i\in B_{p_{i+1}}$ ou $p_{i+1}\in B_{p_i}$ para todo i = 0,1,2,…,n-1.

Um espaço de Alexandroff X é conexo por arcos se e somente se para cada par ordenado de pontos (p, q) em X, há um caminho unindo os dois pontos.

Um subconjunto S de um espaço de Alexandroff X é conexo por arcos se ele é conexo por arcos assumido como subespaço topológico.

Exemplo

(1) Seja X = {1,2,3,4} munido da topologia τ={ϕ,{1},{3},{1,3}, {3,4},{1,2,3},{1,3,4}, X}. Como B_1 = {1},B_2 = {1,2,3}, B_3 = {3} e B_4={3,4}, assumindo que p=1 e q=3,p_0 =1, p_1=2 et p_2=3, vê-se bem que S_{pq}== {1,2,3} é um caminho de origem 1 e de extremidade 3.

(2) Seja X um espaço de Alexandroff e p$\in$X. Como visto acima, cada B_p é um subconjunto conexo por arcos.

II.2.1.4. Teorema

Seja X um espaço de Alexandroff. Então, X é conexo se e somente se X é conexo por arcos no sentido da definição 2.7.

Prova

Suponha-se que X não é conexo. Por definição, há dois conjuntos abertos disjuntos e não vazios V e W tais que X = V$\cup$W. Sejam p$\in$V e q$\in$W. Se S_{PQ}= {p=p_0,p_1,...,p_n=q} é um caminho de p para q, então haveria um p_i e um p_{i+1} tais que $p_i$$\in$V e p_{i+1} $\in$W. Agora, se p_i $\in B_{p_{i+1}}$, então como p_{i+1} $\in$W, teríamos $B_{p_{i+1}} \subset$ W e assim, $p_i$$\in$V$\cap$W. O que é inaceitável pois V e W são disjuntos. Do mesmo modo, se p_{i+1} $\in B_{p_i}$, teríamos p_{i+1} $\in$V$\cap$W; o que é impossível pela mesma razão. Por conseguinte, não existe nenhum caminho de p para q. Portanto, X não é conexo por arcos.

Reciprocamente, suponhamos X conexo. Queremos mostrar que X é conexo por arcos. Se X não fosse conexo por arcos, então para p$\in$X, assumindo A_p= {q $\in$X : existe um caminho de p para q}, teria-se A_p= $\cup${ B_q : existe um caminho de p para q}. Daí A_p é um aberto em X. Como p$\in A_p$, ele é não vazio. Se q$\in$X\$A_p$, então B_q é um aberto contendo q e disjunto de A_p pois se o for q pertenceria a A_p. O que implica que X\$A_p$ é aberto, contradizendo então a conexidade de X. Em conclusão, X deve ser conexo por arcos.

II.2.1.7. Corolário

Um subconjunto S de um espaço de Alexandroff é conexo se e somente se ele é conexo por arcos.

II.2.2. Axiomas T_1 e T_2

II.2.2.1. Definições

Um espaço topológico X é um T_1-espaço se e somente se cada singleton em X é um fechado de X. X é um T_2-espaço ou um espaço separado ou um espaço de Hausdorff se e somente se para todo par ordenado (x, y) de pontos dis de X, existem dois abertos disjuntos V e W tais que x$\in$V e y$\in$W. Claramente, todo T_2-espaço é um T_1-espaço. Mas a reciproca não é, em geral, verdadeira. Para os espaços de Alexandroff, temos o seguinte teorema. (Arenas, F., 1999), (Eustache, M., 2013), (Ntantu , I., 2010) e (Stong, R., 1966)

II.2.2.2. Teorema

Seja X um espaço Alexandroff. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) X é um T_2-espaço

(2) X é um T_1- espaço

(3) X é um espaço discreto.

Prova

Basta mostrar que o espaço T_1-Alexandroff é discreto. Para tal, estabelece-se a igualdade $\{p\} = B_p$, $\forall p\in X$. Consideramos um $p\in X$ e seja $x\in B_p$.

Se $x \neq p$, existem dois abertos V e W em X tais que $x\in V$, $W\in p$, $x\notin W$ e $p\notin V$ (pois X é T_1). Agora $B_p \subset W \Rightarrow x\in W$ (pois $x\in Bp$). Contradição com o fato de que $x\notin W$. Com essa contradição, devemos ter $x = p$ e assim $B_p = \{p\}$. Assim, cada singleton $\{p\}$ é um aberto, que é dizer que X é um espaço discreto

CONCLUSÕES

Nesta primeira fase do estudo do comportamento topológico dos espaços de Alexandroff, demonstramos alguns resultados sobre espaços de Alexandroff começando pela base irredutível passando pelos axiomas de separação, a conexidade e a conexidade por arcos, deixando a normalidade, compacidade e regularidade e como regularidade completa para a parte 2 desta investigação. O nosso estudo vai nos levar a mostrar quanto os espaços de Alexandroff de tipo finito se aplica na modelização em redes informáticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arenas F.G. (1999). *Alexandroff Spaces* , Acta Math. Univ. Comenianae, n°1 , 17-25.

Cauty R., Dobrowolski T. and Marciszewski W. (1993). *A contribution to the topological classification of the spaces C*p(*X*), Fund. Math. 142, 269–301.

Eustache, M.K.B. (2013). «Sur les espaces d'Alexandroff e quelques applications», Thèse de Doctorat en Sciences, UPN.

_______________. (2019). O espaço de funções contínuas num espaço de Alexandroff, Ver. Kulongesa – TES, Vol 1 Série 1., pp. 161-171.

Ntantu, I. (2010). *Caractérisation de la propriété de Baire sur C(X) avec l'hypo-topologie*, CRUPN, n°042, 285-288.

Schmets, J. (1976). *Espaces de fonctions continues*, Lecture Notes in Math. N°519, Springer-Verlag, Berlin.

Stong, R.E. (1966). *Finite topological spaces*, Trans. AMS, n° 123, 325-340.

Síntese curricular dos autores

O Professor Eustache, Makambo é Doutor em Ciências Matemáticas pela Université Pédagogique Nationale (UPN) de Kinshasa (RDC) no campo das Matemáticas Puras com orientação para a Análise Funcional, Diplomado em Estudos Avançados em Matemáticas Aplicadas pela mesma universidade, foi coordenador de Curso de Ensino de Matemática na Escola Superior Politécnica de Lunda Sul, leciona várias cadeiras de Matemática na mesma escola nos cursos de engenharia e é Professor de curso de Pós-graduação. É também professor convidado do Departamento de Matemática da Universidade Agostinho Neto, onde leciona algumas cadeiras de especialidade.