Análise de alguns invariantes topológicos nos espaços de alexandroff

Analysis of some topological invariants on Alexandroff's Spaces

Makambo Eustache [1*]

[1] PHD. Professor assistente. Instituto Politécnico de Saurimo. makambostch87@gmail.com. Código ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3709-6117

[*]Autor para correspondência: makambostch87@gmail.com

RESUMO

Os Espaços de Alexandroff constituem espaços topológicos que se encontram no limiar das matemáticas puras e as matemáticas aplicadas à informática teórica (Ciências de computação). Por espaço de Alexandroff, entendemos todo espaço topológico no qual a intersecção de uma família de abertos é um aberto. Em outras palavras, toda união de uma família arbitrária de fechados é um fechado. O que os transformam em uma ferramenta de grande valia na informatização do contínuo. No presente artigo, o objetivo é aprofundar as propriedades topológicos dos espaços de Alexandroff. A pesquisa foi basada nos métodos científicos de revisão bibliográfica, análise e síntese, a sistematização, dedução e a indução. Devendo provar muitos resultados sobre invariantes topológicos, a demonstração tanto por absurdo, contraposição e recorrência foi utilizada. O que nos levou a acrescentarmos novas propriedades tais que a conexidade, a conexidade por arcos, a compacidade, a propriedade de Lindelöff e a regularidade completa. Mostramos em particular que um espaço de Alexandroff é conexo se e somente se ele é conexo por arcos; que ele é regular se e somente se ele é completamente regular.

Palavras-chave: Espaços de Alexandroff; propriedades topológicas; Invariantes topológicos; Base irredutível.

ABSTRACT

Alexandroff's spaces are topological spaces which are on the frontier of pure mathematics and applied mathematics to theoretical computer science. By a «n Alexandroff«s space we stand any space where the intersection of any familly of p+en sets is an open set. It means that any união of closed sets are a closet set. That situation let them be an important net work to digitalize the continuum.. In this paper, our focus is to deep the topological properties of Alexandroff's spaces. As it is a bibliographical in which analysis, synthesis, systematization, deduction and induction, As we must prouve many results on topological properties, specially the invariants one, using demonstrations like by absurdity, contradiction or contraposition and recurrence, let us to look for and add new properties in Alexandroff's spaces as connexity, path connexity, compacticity, the Lindelöff's property and the complet regularity. We show, in particular, that an Alexandroff's space is connexe if and only if it is path connexe; that it is regular if and only if it is completely regular.

Key-words: Alexandroff's spaces; topological properties; Topological Invariants; Irreductible basis.

INTRODUÇÃO

Em vários trabalhos ligados aos tratamentos de imagem tais como a análise de imagens médicas ou biológicas como também em análise de imagens de materiais e a segmentação de vídeos, muitas noções topológicas constituem um suporte fundamental na discretização dos objetos contínuos em objetos discretos; o que torna possível a sua informatização. No início, a topologia digital foi concebida para as imagens binárias. Ela utiliza dois grafos definindo as vizinhanças de cada ponto do objeto e do fundo, e o quadro matemático que descreve melhor esta interconexão é o espaço de Alexandroff. Por espaço de Alexandroff, entende-se todo espaço topológico no qual a intersecção de uma família arbitrária de abertos é um aberto.

O que equivale a dizer que toda união de uma família de fechados é um fechado. Os espaços de Alexandroff constituem uma classe importante de espaços topológicos que se encontram na intersecção das matemáticas puras e as matemáticas aplicadas à informática (ciência de computação) teórica. Como o destaca F.G.Arenas (1999), é talvez interessante observar o que acontece quando se entorta uma definição padrão. É o que tinha feito o matemático russo Pavel Sergueevitch Alexandroff num artigo publicado em 1937, quando mudou um pouco um dos axiomas na definição do espaço topológico. Tirou-se um novo tipo de espaços topológicos aos quais se atribuiu a denominação de *Diskrete raüme*; hoje conhecido como "Espaços de Alexandroff". Só nos anos de 1980 e 1990 que esses espaços se tornaram em ferramenta importante na informatização dos objetivos contínuos; daí o interesse para os matemáticos e os informáticos. Desde os trabalhos de Alexandroff sobre esses espaços, muitos matemáticos e informáticos se debruçaram sobre as ricas propriedades dos espaços de Alexandroff. Para dar-se conta disso, basta consultar os trabalhos tais como os de (Shirazi & Getan, 2011); (Ntantu, 2010); (Arenas, 1999); (Alsa Elatras, 2000); (Saint Raymond, 1971); (Grawert, 1998); (Barmack, 2010); (Makambo, 2011; 2013); (Castro, 2010); etc.

No presente artigo, o foco se centra em aprofundar as propriedades topológicos dos espaços de Alexandroff.. Portanto, perscrutamos os invariantes topológicos, dando a caracterização de algumas propriedades topológicas tais como a conectividade, a conectividade por arcos, os axiomas de separação T_1 e T_2, a regularidade e a regularidade completa, a normalidade, a compacidade, a propriedade de Lindelöff e outras propriedades gerais dos espaços Alexandroff. Se mostra em particular, que a conexão é igual a conectividade por arcos, que a regularidade é igual à regularidade completa e que em geral um espaço de Alexandroff não é homogéneo (Makambo, 2013). Todas estas ideias, são utilizados com aproveitamento para o efeito usando os métodos da demonstração tal como a contraposição, a recorrência, pelo absurdo.

Como já foi referido acima, num espaço de Alexandroff, todo espaço topológico no qual a intersecção arbitrária dos abertos é ainda um aberto. O que equivale a dizer que todo ponto possui uma base de vizinhança mínima. Alem dos trabalhos acima citados sobre os espaços de Alexandroff, matemáticos como Eckhardt e Latecki (2003; 2008), Gruenhage (1976), Herman (1990), Khalimsky (1987), Kovalevsky (1989), Kronheimer (1992), Malandain (2006), Ntantu, Makambo & Kuyunsa (2011), estes inclinaram-se na exploração da imensa riqueza das suas propriedades tal como também nas suas aplicações nas ciências de computação.

Em Makambo (2013), o comportamento topológico dos espaços de Alexandroff foi destacado, em imitação à definição da topologia da convergência compacta, levando à topologia da base irredutível sobre o espaço de funções contínuas sobre o espaço de Alexandroff. foi respondida a questão sobre a pertinência do estudo

E no presente artigo, iniciou-se por mostrar que todo espaço de Alexandroff é localmente conexo e que em espaços de Alexandroff há equivalência entre conexidade e conexidade por arcos. Mostra-se alguns outros resultados da separabilidade, isto é, para um espaço de Alexandroff um T_1-espaço é um T_2-espaço como também, é discreto. Num espaço de Alexandroff regular, todo fechado é aberto e um tal espaço, sendo regular, é completamente regular. Portanto, é discreto. E isso proporciona um olhar na parte aplicacional dos espaços de Alexandroff de tipo finito, pois um espaço de Alexandroff de tipo finito modeliza uma rede informática e reciprocamente, uma rede informática pode ser realizada para uma topologia de Alexandroff. O que justifica que a posição dos espaços de Alexandroff que constituem uma classe importante dos espaços topológicos que se encontram no limiar das matemáticas puras e das matemáticas aplicadas à informática teórica. No que segue, o nosso foco se encontra nas propriedades topológicas desses espaços de Alexandroff.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para estarmos conforme às nossas pretensões, apresentamos os resultados, definindo para o efeito certos conceitos importantes relacionados a cada resultado, conferindo-nos em Barmak (2010), Castro (2010) e, especialmente, em Makambo (2013) para todos os resultados aqui tratados.

1. **Conexidade nos espaços de Alexandroff**

Nesta secção, mostramos que todo espaço de Alexandroff é localmente conexo e associamos a conexidade com a conexidade por arcos.

Teorema 1.1. Todo espaço de Alexandroff X é localmente conexo.

Prova

Basta mostrar que cada B_p é conexo para todo $p\in X$. se assume, portanto, que $p\in X$ e suponhamos por absurdo que B_p não é conexo. Seja V e W dois abertos não vazios e disjuntos de B_p tal que $B_p = V\cup W$. Então há dois abertos V' e W' em X tais que $V=V'\cap B_p$ e $W=W'\cap B_p$. Logo $B_p=(V'\cap B_p)\cup(W'\cap B_p)= B_p\cap(V'\cup W')$. Como $p\in B_p$, então $p\in(V'\cup W')$. Se $p\in V'$, tem-se $B_p\subset V'$. Logo $B_p\subset V\subset B_p \Rightarrow B_p=V\Rightarrow W=\emptyset$. Contradição.
Do mesmo modo, se $p\in W'$, mostramos que $B_p = W$; portanto $V =\emptyset$. Contradição. Por conseguinte, B_p deve ser conexo; isto é, X é localmente conexo.

Teorema 1.2. Seja X um espaço de Alexandroff e $p\in X$. Então B_p é conexo e conexo por arcos.

Prova

Já se mostrou no teorema 1. que B_p é conexo. Para a conexidade por arcos de B_p, seja $q\in B_p$. Mostramos que existe um caminho σ unindo p a q. Definimos σ: $[0,1] \rightarrow X$ por $\sigma(t) = q$ se $0\leq t<1$ e $\sigma(1) = p$. Se mostrarmos que σ é contínua, então σ será um caminho de origem $\sigma(0) = q$ e de extremidade $\sigma(1) = p$. Seja V um aberto de X. Mostramos que $\sigma^{-1}(V)$ é aberto em $I = [0,1]$.

Distinguimos três casos:

Caso 1: $q\notin V$ e $p\notin V$. Nesse caso, vê-se que $\sigma^{-1}(V)=\emptyset$ que é aberto em $I = [0,1]$.

Caso 2: $q\in V$ e $p\notin V$. Nesse caso, $\sigma^{-1}(V) = [0,1)$, que é aberto em $I = [0,1]$, pois $[0,1) = [0,1]\cap(-\infty, 1)$.

Caso 3: $p\in V$. Nesse caso, tem-se $B_p \subset V$. Como $q\in B_p$ por hipótese, então $q\in B_p\subset V\Rightarrow q\in V$. Portanto $p\in V$ e $q\in V$ mostram que $\sigma^{-1}(V) = [0,1]$, que é aberto em $[0,1]$.
Assim, acabamos de mostrar que $\sigma^{-1}(V)$ é aberto em $[0,1]$ para cada V aberto de X. Logo σ é contínua em $[0,1]$.

Por conseguinte, σ é um caminho juntando q a p. Note que $\sigma[0,1]\subset B_p$ pois $\sigma([0,1)) = \{q\}$ e $\sigma(1) = p$.

Teorema 1.3. Seja X um espaço de Alexandroff. Então, X é conexo se e somente se X é conexo por arcos.

Prova

Se X é conexo por arcos, sabe-se já que ele é conexo por arcos.

Reciprocamente, suponhamos X conexo. Mostramos que X deve ser conexo por arcos. Sabemos que por hipótese X é conexo por arcos. Como cada B_p é conexo por arcos pelo teorema 1.2, então X é localmente conexo por arcos.

Agora, um espaço que é localmente conexo por arcos deve ser conexo por arcos. Portanto X é conexo por arcos.

Para o que segue, definiram (Makambo, 2013; Caastro, 2010; Barmack, 2010)

Sejam X um espaço de Alexandroff e, p e q dois pontos de X.
1) Chamamos caminho de origem p e de extremidade q, todo subconjunto finito S_{pq} ={p=p_0,$p_{1,...,}$$p_n$=q} de X, onde os p_i são pontos de X que satisfazem a relação: $p_i \in B_{p_{i+1}}$ ou $p_{i+1} \in B_{p_i}$ para todo i=0,1,2,…,n-1.
2) Um espaço de Alexandroff X é conexo por arcos se e somente se para cada par ordenado de pontos (p, q) em X, há um caminho unindo os dois pontos.
3) Um subconjunto S de um espaço de Alexandroff X é conexo por arcos se ele é conexo por arcos assumido como subespaço topológico.
Com isso, segue o seguinte resultado

Teorema 1.6. Seja X um espaço de Alexandroff. Então, X é conexo se e somente se X é conexo por arcos no sentido da definição 1.4.

Prova

Suponha-se que X não é conexo. Por definição, há dois conjuntos abertos disjuntos e não vazios V e W tais que X = V∪W. Sejam p∈V e q∈W. Se S_{pq} = {p=p_0,$p_{1,...,}$$p_n$=q} é um caminho de p a q, então existiria um p_i e um p_{i+1} tais que $p_i \in V$ e $p_{i+1} \in W$.

Agora, se $p_i \in B_p$, então como $p_{i+1} \in W$, teríamos $B_{p_{i+1}} \subset W$ e assim, $p_i \in V \cap W$. O que é inaceitável, pois V e W são disjuntos. Do mesmo modo, se $p_{i+1} \in B_{p_i}$, teríamos $p_{i+1} \in V \cap W$; o que é impossível pela mesma razão. Por conseguinte, não existe nenhum caminho de p para q. Portanto, X não é conexo por arcos.

Reciprocamente, suponhamos X conexo. Queremos mostrar que X é conexo por arcos. Se X não fosse conexo por arcos, então para p∈X, assumindo

A_p= {q ∈X : existe um caminho de p para q}, ter-se-ia A_p= ∪{ B_q : existe um caminho de p para q}. Daí A_p é um aberto em X. Como $p \in A_p$, ele é não vazio. Se $q \in X \backslash A_p$, então B_q é um aberto contendo q e disjunto de A_p pois se o for q pertenceria a A_p. O que implica que $X \backslash A_p$ é aberto, contradizendo então a conexidade de X. Em conclusão, X deve ser conexo por arcos.

Corolário 1.7. Um subconjunto S de um espaço de Alexandroff é conexo se e somente se ele é conexo por arcos.

2. **Axiomas de separação**

Conforme o propósito deste artigo, consideramos agora a separabilidade, tratando dos axiomas de separação T_1 e T_2. Definimos

1) Um espaço topológico X é um T_1-espaço se e somente se cada singleton em X é um fechado de X.

2) Um espaço topológico X é um T_2-espaço ou um espaço separado ou, ainda, um espaço de Hausdorff se e somente se para todo par ordenado (x, y) de pontos dis de X, existem dois abertos disjuntos V e W tais que x∈V e y∈W.

3) Claramente, todo T_2-espaço é um T_1-espaço. Mas a recíproca não é, em geral, verdadeira. Para os espaços de Alexandroff, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.7. Seja X um espaço Alexandroff. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) X é um T_2-espaço

(2) X é um T_1- espaço

(3) X é um espaço discreto.

Prova

Basta mostrar que o espaço T_1-Alexandroff é discreto. Para tal, estabelece-se a igualdade {p} = B_p ∀ p ∈ X. Consideramos um p∈X e seja $x \in B_p$. Se x ≠ p, existem dois abertos V e W em X tais que x∈V, W∈p, x∉W e p∉V (pois X é T_1). Agora $B_p \subset W \Rightarrow x \in W$ (pois x∈Bp). Contradição com o facto de que $x \notin W$. Com essa contradição, devemos ter x = p e assim Bp ={p}. Assim, cada singleton {p} é um aberto. Isto é, X é um espaço discreto.

3. Regularidade e regularidade completo

Segundo (Makambo, 2013; Barmak, 2010)

1) Um espaço topológico é regular se e somente se para todo fechado A e para qualquer ponto p não pertencendo a A, existem dois abertos disjuntos U e V tais que $A \subset U$ e $p \in V$.

2) Um espaço topológico X é completamente regular se e somente se para todo aberto V de X e tudo $p \in V$, existe uma função contínua $f: X \to \mathbb{R}$ tal que f (p) = 1, $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$ e $f(X \setminus V) = \{0\}$.

3) Num espaço Alexandroff regular se o fechado A não estiver aberto, então $B_A \setminus A \neq \emptyset$ e, portanto, existe $p \in B_A \setminus A$ com $\{p\} \cap B_A = \{p\}$ e assim por $Bp \cap B_A \neq \emptyset$, isto é, em qualquer espaço regular de Alexandroff, todo fechado é também aberto; como se demonstrou no seguinte resultado.

Teorema 1.8. Seja X um espaço Alexandroff. Então X é regular, se e somente se todo fechado de X é um aberto de X.

Prova

Se considera F, um fechado de X. Se F não estiver aberto, então $F \neq B_F = \cap\{V \subset X : V$ é aberto e $F \subset V\}$ que é o menor aberto contendo F. Seja $p \in B_F \setminus F$. Já se tem $B_p \subset B_F$. Como $p \notin F$, pela regularidade de X, existem dois disjuntos aberto U e W tal que $p \in U$ e $F \subset W$. Segue-se que a $B_p \subset U$ e $B_F \subset W$, e assim $Bp \cap B_F = \emptyset$. Contradição com $B_p \subset B_F$. Por conseguinte, $F = B_F$ e assim F é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que todo fechado de X é aberto em X. Seja $p \notin F$ com $p \in X$ F e F um fechado. Então $p \in X \setminus F$ e, como F é fechado, $X \setminus F$ é aberto de X. Além disso, por hipótese F é aberto. Portanto, F e $X \setminus F$ são abertos disjuntos separando F e p. Portanto X é regular.

Observações Fundamentais

1) Num espaço de Alexandroff regular, acabamos de ver que se um fechado F não é aberto, então $B_F \setminus F \neq \emptyset$ e, portanto, existe $p \in B_F \setminus F$ com $\{p\} \cap B_F = \{p\}$ e assim $B_p \cap B_F \neq \emptyset$.

2) Seja X um espaço de Alexandroff regular e $p \neq q$ dois pontos de X. Devemos ter ou $p \in B_p \cap B_q$ ou $p \in B_p \cap B_q^c$. Como X é regular, B_q^c é um aberto de X. Então $B_p \cap B_q$ e $B_p \cap B_q^c$ são dois abertos de X contendo p e menores que B_p. O que contradiz a definição de B_p, a menos que se tenha $B_p = B_q$ ou que $B_p \cap B_q = \emptyset$ (quer dizer, $B_p = B_p \cap B_q^c$). Assim, um espaço de Alexandroff regular é não conexo e os subconjuntos B_p formam uma partição de X pois $X = \cup\{B_p : p \in X\}$, e como sub-espaço topológico, cada B_p possui a topologia grosseira.

3) Em um espaço regular de X Alexandroff, se p e q são dois pontos, então tem-se ou $B_p = B_q$ no qual caso p=q ou então $B_p \cap B_q = \emptyset$ e $p \neq q$ nesse caso.

Quando um espaço de Alexandroff é simultaneamente regular e T_0, ele é discreto.

Teorema 1.9. Todo T_0-espaço de Alexandroff regular é um espaço discreto.

Prova

Seja X um T_0-espaço de Alexandroff regular e $p \in X$. Mostre que $B_p = \{p\}$. Suponhamos por absurdo que existe $q \in B_p$ tal que $q \neq p$. Tem-se então, ou $p \in B_p \cap B_q$, ou $p \in B_p \cap B_q^c$, onde B_q^c é o complemento de B_q em X.

Caso 1: $p \in B_p \cap B_q$

Tem-se: $p\in B_p\cap B_q \Rightarrow B_p \subset B_p\cap B_q\subset B_q$. Mas como $q\in B_p$ (por hipótese) $\Rightarrow B_q\subset B_p\subset B_p \cap B_q\subset B_q \Rightarrow B_p=B_q$. Como X é T_0 e que $p\neq q$, existe um aberto V tal que $p\in V$ e $q\notin V$, ou existe um aberto W tal que $q\in W$ e $p\notin W$. Se $p\in V$ e $q\notin V$, então $B_q = B_p\subset V$ e $q\notin V$. Contradição pois $q\in B_q$. Do mesmo modo, se $q\in W$ e $p\notin W$, então $B_p = B_q\subset W$ e $p\notin W$. Contradição pois $p\in B_p$. Assim, com esta contradição, devemos ter $B_p=\{p\}$.

Caso 2: $p\in B_p \cap B_q^c$

Como X é regular, então pelo teorema 1.8 acima referido, B_q^c é aberto. Logo $B_p \subset B_p \cap B_q^c \subset B_p \Rightarrow B_p= B_p \cap B_q^c \subset B_q^c \Rightarrow B_p\cap B_q=\varnothing$. Mas como $q\in B_p$ e $q\in B_q \Rightarrow q\in B_p\cap B_q\neq \varnothing$, contradição. Nesse caso, $B_p = \{p\}$.

Como $\{p\}= B_p$ para todo $p\in X$, concluímos que X é discreto.

O resultado que segue caracteriza os espaços de Alexandroff que são completamente regulares

Teorema 1.10. As seguintes afirmações são equivalentes para todo espaço de Alexandroff X:

1. X é regular;
2. Todo fechado de X é aberto em X;
3. Todo aberto de X é fechado em X;
4. O aberto irredutível B_p é fechado para todo p em X;
5. $B_p = F_p$ para todo $p\in X$;
6. A topologia τ de X é igual a sua cotopologia τ^*;
7. X é completamente regular;
8. Para todo $p\in X$, a função característica χ_{B_p} de B_p é contínua;
9. Para todo U aberto não vazio de X, a função característica χ_U é contínua;
10. Para todo F fechado não vazio de X, a função característica χ_F é contínua.

Prova

As equivalências (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) e (3) $\Leftrightarrow$ (6) são fáceis de determinar.

Para (7) $\Leftrightarrow$ (1): Assuma-se em primeiro lugar que X é completamente regular e mostra-se que X é regular. Para tal, seja p um ponto de X. Como $p\in B_p$ e B_p é aberto em X, pela regularidade completa de X, existe uma função contínua f: $X\to\mathbb{R}$ tal que f(p)=1 e f(X\Bp)=0. Pela continuidade de f, $f(B_p)= f(p)=1$ e $B_p=f^{-1}(1)$ mostra que B_p é fechado em X. Isso sendo verdadeiro para todo $p\in X$, concluímos pela equivalência (4) $\Leftrightarrow$ (1) que X é regular. Para a reciproca, suponhamos X regular. Seja $p\in X$. Vamos mostrar que a função característica de Bp é contínuo. Seja então f: $X\to\mathbb{R}$ esta função. Sabemos que $f(B_p)=1$ e $f(X\backslash B_p)=0$. Se V é um aberto de $\mathbb{R}$, examinamos $f^{-1}(V)$ em X.

Temos quatro casos:

- Caso 1: $1\in V$ et $0\in V$: nesse caso $f^{-1}(V)=X$ que é aberto de X
- Caso 2: $1\in V$ e $0\notin V$: nesse caso $f^{-1}(V)=B_p$ que é aberto em X
- Caso 3: $1\notin V$ e $0\in V$: nesse caso $f^{-1}(V)= X\backslash B_p$ que é aberto em X pois todo fechado de X é aberto pela regularidade de X.
- Caso 4:$1\notin V$ e $0\notin V$: nesse caso $f^{-1}(V)=\phi$ que é aberto em X.

Agora mostramos ue X é completamente regular. Para tal, seja U um aberto em X e $p\in X$. Como $Bp \subset U$, então $X\backslash U \subset X\backslash B_p$. Seja então f a função característica de B_p. Então f é contínua tal que f(p)=1 e $f(X\backslash U)\subset f(X\backslash B_p)=0$. Em seguida f(p)=1 e f(X\U)=0. De onde X é completamente regular.

As equivalências (7)$\Leftrightarrow$(8)$\Leftrightarrow$(9)$\Leftrightarrow$(10) resultam das ideias na prova de (1)$\Leftrightarrow$(7).

Observações 2.

1). Num espaço de Alexandroff completamente regular X, sejam p e q dois pontos de X. Sabe-se pelo Teorema 1.10. (4) acima que Bp= Fp para todo $p\in X$. Além disso, $p\in F_q \Leftrightarrow q\in B_p$. Temos as seguintes equivalências: $p\in B_q \Leftrightarrow q\in B_p\Leftrightarrow B_q =B_p$.

2). Se $p \neq q$ num espaço de Alexandroff completamente regular, há $g \in C(X)$ tal que $g(p) = 1$ e $g(q) = 0$.
3). Todo T_0-espaço de Alexandroff completamente regular é um espaço discreto.

4. Normalidade

Na obra (Makambo, 2013)

Um espaço topológico X é normal se e somente se para todos fechados disjuntos A e B, existem abertos disjuntos U e V tais que $A \subset U$ e $B \subset V$. Todo T_1-espaço normal é regular. Mas a recíproca não é verdadeira.

Para os espaços de Alexandroff, temos o seguinte resultado

Teorema 1.11. Todo espaço de Alexandroff regular é normal.

Prova

Seja X um espaço de Alexandroff regular. Sejam A e B dois fechados disjuntos em X. Pelo teorema 1.8, A e B são também abertos disjuntos separando A e B. Assim, X é um espaço normal.

Se X é um espaço de Alexandroff normal, então os fechados disjuntos contendo P e P' devem ser disjuntos, quer dizer que $\cap B_{P'} = \varnothing$.

Teorema 1.12. Seja X um espaço de Alexandroff. Então X é normal se e somente se para todo fechado P de X, B_P é um fechado em X.

Prova

Suponha X normal. Seja P um fechado de X. Assumimos $F = X \backslash B_P$ que é fechado em X, e $P \cap F = \varnothing$. Como P e F são fechados disjuntos de X, pela normalidade, existem dois abertos disjuntos tais que $P \subset V$ e $W \subset F$. Logo, $B_P \subset V$ e $B_F \subset W$. Segue-se que $B_P \cap B_F = \phi$, o que implica que $B_F = X \backslash B_P = F$. Assim, F é aberto $\Rightarrow$ $B_P = X \backslash (X \backslash B_P) = X \backslash F$ é fechado.
Reciprocamente, suponha que seja fechado para todo P de X. Mostramos que X é normal. Sejam P e Q dois fechados disjuntos de X. Por definição, B_P e B_Q são abertos de X contendo P e Q, respectivamente. Vamos mostrar que esses dois abertos separam P e Q. De facto, $P \cap Q = \varnothing$, extrae-se a inclusão $Q \subset X \backslash P$. Uma vez que $X \backslash P$ é um aberto contendo Q, ele deve também conter B_Q. Daí, $P \cap B_Q = \varnothing$, o que mostra que $P \subset X \backslash B_Q$. Por hipótese B_Q é um fechado de X, o que implica que o aberto $X \backslash B_Q$ contendo P deve também conter B_P. Assim, B_P e B_Q são disjuntos e separam P e Q.

Corolário 1.13. Um espaço normal de Alexandroff X é regular se e somente se $P = B_P$ para todo fechado P de X.

4.1. Exemplo de um espaço de Alexandroff normal, que não é regular (Makambo, 2013)

Seja $X=\{1,2,3,4\}$ e $\tau=\{\phi,\{3\},\{1,2\},\{3,4\},\{1,2,3\},X\}$. Os fechados de (X,τ) são :$\phi,\{4\},\{1,2\},\{3,4\},\{1,2,4\}$. Daí $B_\phi=\phi, B_{\{4\}}=\{3,4\}$, $B_{\{1,2\}}=\{1,2\}$, $B_{\{3,4\}}=\{3,4\}$, $B_{\{1,2,4\}}=X$. Assim para todo fechado P de X, tem-se B_P é fechado em X. Portanto (X,τ) é normal. No entanto (X,τ) não é regular pois o fechado $\{4\}$ não é aberto em (X,τ).

5. Compacidade

Definimos (Makambo, 2013)

Um espaço topológico X é compacto se e somente se todo recobrimento aberto de X admite um sub-recobrimento finito.

Teorema 1.14. Seja X um espaço de Alexandroff. Então X é compacto se e somente se existe um conjunto finito $P \subseteq X$ tal que $X = B_P$.

Prova

Suponhamos X compacto. Como X = $\cup\{B_p : p \in X\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que X = $\bigcup_{i=1}^{n} B_{p_i}$ = B_P, onde P= { p_i : i=1, 2, …, n}.

Reciprocamente, suponhamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que P= $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset X$ e X = $B_P = \bigcup_{i=1}^{n} B_{p_i}$. Para mostrar que X é compacto, seja **V** = $\{V_\phi : \phi \in \Gamma\}$ um recobrimento aberto de X.
Para todo $1 \leq i \leq n$, existe $\phi_i \in \Gamma$ tal que $p_i \in V_{\phi i}$. Como $V_{\phi i}$ é aberto, então $p_i \in B_{p_i} \subset V_{\phi i}$. De onde X = $B_P = \bigcup_{i=1}^{n} B_{p_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{\phi i}$. Assim $\{V_{\phi i} : i= 1, 2, \ldots, n\}$ é um sub-recobrimento finito de **V**. Portanto X é compacto.
Admite-se o seguinte

Corolário 1.15. Sejam X um espaço de Alexandroff e S um subconjunto de X. Então S é um compacto de X se e somente se existe um conjunto finito $P \subseteq S$ tal que S =S B_P. Além disso, se S é aberto, então S = B_P.
Assim, cada B_P é um compacto de X para toda parte finita P de X. Em particular, B_p é um subconjunto compacto de X para todo $p \in X$.

6. Espaços de Alexandroff possuindo a propriedade de Lindelöf

Definimos (Makambo, 2013)
Um espaço topológico X verifique a propriedade de Lindelöff (ou é um espaço de Lindelöff) se e somente se todo recobrimento aberto de X admite um subconjunto enumerável.
Teorema 1.16. Seja X um espaço de Alexandroff. Então X verifique a propriedade de Lindelöf se e somente se existe um conjunto enumerável $P \subset X$ tal que X = B_P.

Prova

Suponha que X satisfaz a propriedade Lindelöff. Como X = $\cup\{B_p : p \in X\}$, então a família $\{B_P : p \in X\}$ é um recobrimento aberto de X. Portanto existe um subconjunto enumerável P = $\{p_n$: n = 1, 2, ...} tal que X = $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{p_n}$ = B_P.

Reciprocamente, suponhamos que existe um conjunto enumerável P = $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\} \subset X$ tal que X = $B_P = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{p_n}$. Para mostrar que X satisfaz a propriedade Lindelöf, consideramos **V** =$\{V_\phi : \phi \in \Gamma\}$ um recobrimento aberto de X. Para todo n natural não nulo n, existe $\phi_n \in \Gamma$ tal que $p_n \in V_{\phi n}$. Como $V_{\phi n}$ é aberto em X, então $p_n \in B_{p_n} \subset V_{\phi n}$. Daí X = $B_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{p_n} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{\phi n}$. Assim $\{V_{\phi n} : n=1, 2, \ldots\}$ é um sub-recobrimento enumerável de **V**. Portanto X verifique a propriedade de Lindelöf.

7. Outras propriedades topológicas dos espaços de Alexandroff (Castro, 2010; Makambo, 2013)

Teorema 1.17 Seja X um espaço de Alexandroff. Então tem-se:

(1) X verifique o primeiro axioma de enumerabilidade; isto é, cada ponto possui uma base enumerável de vizinhanças em ocorrência $\{B_p\}$ $\forall$ $p \in X$.
(2) X verifique o segundo axioma de enumerabilidade; isto é, X possui uma base enumerável de abertos se e somente se X é enumerável.
(3) X é separável se e somente se existe uma sequência $(x_n)_n$ tal que X= $\cup\{$ $: n \in \mathbb{N}\}$
(4) Se X é finito, então ele é compacto.
(5) X é quase-metrizável se e somente se cada B_p é finito e fechado em X para todo $p \in X$.

O seguinte corolário derive do ponto (2) do teorema 1.17.

Corolário 1.18. Seja X um espaço de Alexandroff.

1) Se **B**= {B $_p$:p∈X}, então card(X) ≤ card(**B**). Em particular, todo espaço de Alexandroff verificando a propriedade de Lindelöff é enumerável.

2) Se X é quase-metrizável, então ele é completamente regular.

9. Espaços de Alexandroff localmente finitos

Novamente na obra (Makambo, 2013)

1) Um espaço X de Alexandroff é localmente finito se cada ponto p de X possui uma vizinhança finita e um conjunto finito e fechado contendo o ponto p.

2) Num espaço de Alexandroff X, se p∈X, assumimos que $F_p = \cap\{F \subset X : F$ é fechado de X e $p \in F\}$. F_p é o menor fechado de X contendo p. Além disso, $B_p = \cap\{V \subset X : V$ é um aberto de X e $p \in V\}$ é o menor aberto X contendo p.
Assim, podemos dizer que
3) um espaço de Alexandroff X é localmente finito se e somente se para todo p∈X, B_p e F_p são subconjuntos finitos de X.
O que mostra que todo espaço de Alexandroff de cardinalidade finita é localmente finito.
4) Um exemplo de espaço localmente finito: Consideramos o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros com a topologia de Alexandroff definida pela base irredutível cujos elementos são:
B_p ={ p-1, p, p+1 }, se p é ímpar e B_p = {p}, se p é par. A topologia assim definida é chamada de *topologia de Marcus-Wyse*. Ela é localmente finita.
Teorema 1.19. Seja X um espaço de Alexandroff localmente finito e não-discreto. Então, existem dois pontos distintos p e q em X tal que se W(p) e W(q) são vizinhanças de p e q, respetivamente, e se f: W(p)→W(q) é uma injecção com f(p) = q, então f não é contínua.

Prova

Como X não é discreto, ele não é T1. Logo existem dois pontos distintos p e q em X tais q∈Bp e p∉Bq. Daí Bq é estritamente contido em Bp. Assim, card(Bq)<card(BP). Obviamente, BP é um aberto de W(p) e Bq é um aberto de W(q).

Seja agora f: W(p)→W(q) uma injecção contínua. Como p∈f-1(Bq) obtém-se que Bp ⊂ f-1(Bq). Daí card(Bp) ≤ card(f-1(Bq)) = card(Bq), o que contradiz o fato de que card(Bq)<card(Bp).

Observação 3

Um espaço topológico é homogéneo quando dois pontos distintos possuem vizinhanças homeomorfas. Nosso teorema afirma que um espaço de Alexandroff não-trivial não é homogéneo.

Teorema 1.20. Seja X um espaço Alexandroff localmente finito. Então, temos:

1. Cada conjunto Fp contém pelo menos um vértice para todo p∈X.

2. Se Fp ≠ Fq então existe um vértice no um que não se encontra no outro.

Prova

1. Se Fp = {p}, então p é um vértice. Se não existe q tal que q≠q. Nesse caso, p∉Fp ⊂ Fq e card(Fq)<card(Fp). Repetindo esse processo com Fq, chega-se eventualmente a um vértice contido em Fp.

2. Se os dois conjuntos Fp e Fq são disjuntos, o resultado é obtido a partir de (1). Se não Fp ∩ Fq ≠∅, e podemos usar a construção em (1) para encontrar um vértice com a propriedade procurada.

No resultado seguinte, vamos mostrar que o número de elementos de um espaço de Alexandroff finito é um invariante topológico.

Teorema 1.21. Cardinalidade

Seja X um espaço de Alexandroff finito e Y um espaço de Alexandroff qualquer. Se f: $X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo de X em Y, então X e Y têm o mesmo número de elementos.

Prova

Como a aplicação f é um homeomorfismo, ela é injectora. Resta-nos mostrar que f é sobrejectora. Para isso, seja $q \in Y$. Precisamos encontrar $p \in X$ tal que $q = f(p)$. Como $q \in Bq$, então Bq é um aberto não vazio de Y. Pelo homeomorfismo de f, f-1(Bq) é um aberto não vazio de X contendo f-1(q). Seja então $p \in f\text{-}1(q) \subseteq f\text{-}1(Bq)$. Então $p \in Bp \subseteq f\text{-}1(Bq)$ e pela continuidade de f, $f(p)=q \in f(Bp) \subseteq f(f\text{-}1(Bq)) \subseteq Bq$. Assim, f é sobrejectora. Em seguida, card X = Card Y. Como X é de cardinalidade finita, então X e Y têm o mesmo número de elementos.

CONCLUSÕES

Este artigo foi centrado no estudo do comportamento topológico dos espaços de Alexandroff. Admitida a existência da base irredutível e da relação de ordem nesses espaços, aprofundamos o estudo, descobertas algumas das suas propriedades. Assim, foram demonstradas

- A conexidade local, a conexidade por arco que, nos espaços de Alexandroff equivale a conexidade.

- Para os espaços de Alexandroff, um espaço discreto é T1 como também é T2.

- Um espaço de Alexandroff regular e T0, ele é discreto. E todo espaço regular de Alexandroff é normal. E esta propriedade equivale a dizer que neste espaço, para todo fechado P, BP é um fechado.

- Demonstrou-se a compacidade e sub certas condições descritas, um espaço de Alexandroff é de Lindeloff.

- Finalmente, foram associadas outras propriedades como os axiomas de eumerabilidade e a pseudo-metrizabilidade nos espaços de Alexandroff.

Tais propriedades são interessantes na parte aplicacional dos espaços de Alexandroff.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexandroff, P.S; Hop, f. H. (1935). *Topologie I*, Springer-Verlag, Berlin.

Alexandroff, P.S (1937). *Diskrete Räume*, Mat. Sbornik, 501-518p.

Al-Samak Mahdi, H.B & Elatrash, M.S. (2000). *θ-Closed Sets in T_0-Alexandroff Spaces*, Preprint.

Arenas, F.G. (1999). *Alexandroff Spaces*, Acta Math. Univ. Comenianae, n°1, Volume 68, 17-25p.

Castro, J.E.R. (2010). Topologies de Alexandroff: três puntos de vista diferentes. *Tesis de Magister en Ciências Matemáticas*. Universidad Nacional de Columbia.

Eckhardt, U & Latecki, L. (2003). *Topologies for the digital spaces $\mathbb{Z}^2$ and $\mathbb{Z}^3$*, CVIU 90, 295-312p.

Ekici, E. (2011). *On I-Alexandroff and I_g-Alexandroff Ideal Topological Spaces*, Filomat 25:4, 99-108p.

Elatrash, M. & Al Samak, S. F. (2006). *Pre-open and semi-open sets in T_0-Alexandroff spaces*, Journal of Al-Aqsa Univ, 10 (S.E.).

El-Fattah El-Atik A., Abd El-Monsef, M.E. & Lashin, E.I. (2002). *On finite T_0-topological spaces*, Proceed. 9th Prague Topological symposium, 75-90p.

Grawert, P.W. (1998). Funciones de dimensión en Espacios de Alexandroff. *Tesis de doctorado en Ciencias Matemáticas*. Universidad Autonoma Metropolitana, México.

Herman, G.T. (1990). On topology as applied to Image *Analysis*, Comput. Vision, Graphics Image Process, n°52, 409-415p.

Kovalevsky, V.V. (1989). *Finite topology as applied to image analysis*, Computer vision, graphics and image processing, 45: 141- 161p.

Kuratowski, K. (1966) and (1968). *Topology*, I and II, Academic Press and Polish Scientific Publishers, New York and Warszawa,.

Lutzer, D. (1971), *On generalized ordered spaces*, Dissertationes Math. 89p.

Makambo K.B. E. (2011). *Sur les groupes d'homotopie des espaces d'Alexandroff* , Mémoire DEA, UPN.

Makambo K.B. E. (2013). Sur les espaces finis de Alexandroff de type fini et quelques applications, UPN.

McCoy, R.A. & Ntantu, I. (1988). *Topological Properties of Spaces of Continuous Functions*, Springer- Verlag, Berlin.

Muaku, M.F. (2011). *Etude comparative de quelques propriétés de l'épi-topologie et de la faible-épi-topologie sur C(X)* Mémoire DEA, UPN.

Munkres, J.R. (1975). *General topology*, Prentice- Hall. Englewood cliffs, N.J.

Shirazi, A.Z. & Golestani, N. (2011). *Functional Alexandroff Spaces*, Hacettepe J. of Math and Statistics, Vol.40, 515-522p.

Stong, R.E. (1966). *Finite topoogical spaces*, Trans. AMS., n° 123, 325-340p.

Síntesis curricular de los autores

Dr. Makambo Eustache é docente efetivo do Instituto Politécnico da Lunda-Sul, uma instituição pertencente à Universidade Lueji-A-N'Konde. Doutor em Ciências na especialidade das Matemáticas Puras com Orientação Análise Funcional, possui um Diploma de Estudos Avançados em Matemáticas Aplicadas. Leciona várias cadeiras ligadas às Matemáticas tais como Análise Matemática, Teoria das Funções, Matemática Discreta, Métodos Estatísticas, Métodos Estatísticos, Equações Diferenciais, Análise Funcional e Teoria de Medidas. Foi docente convidado no Departamento de Matemáticas da Faculdade de Ciências Naturais da Universidade Agostinho Neto. Já publicou vários artigos científicos em muitas revistas científicas e já citados em vários trabalhos como também os seus trabalhos sobre os espaços de Alexandroff originaram tesses de mestrado e de doutoramento.